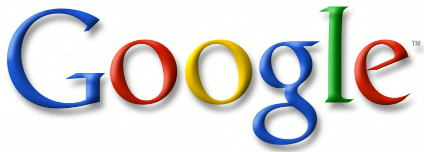
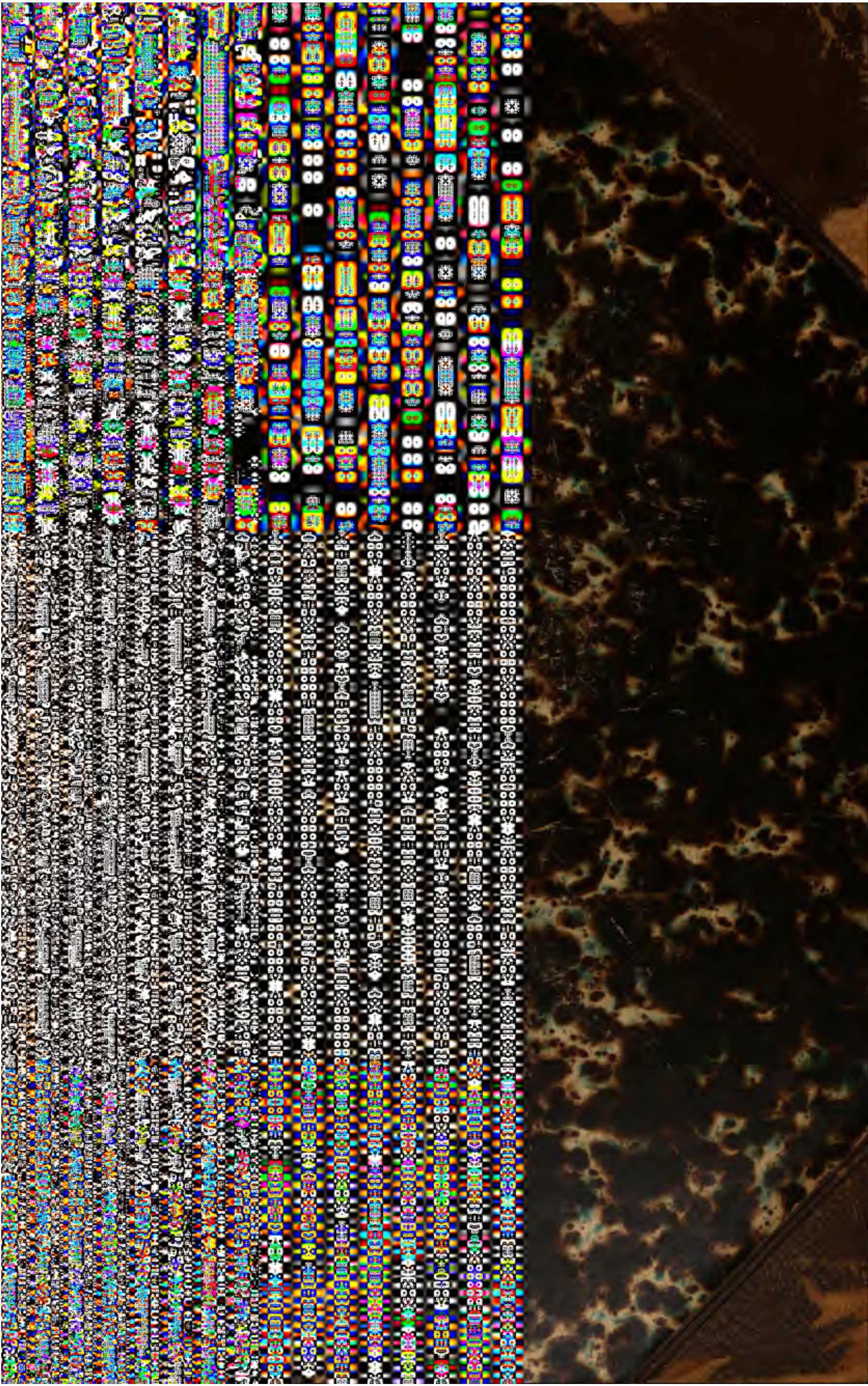
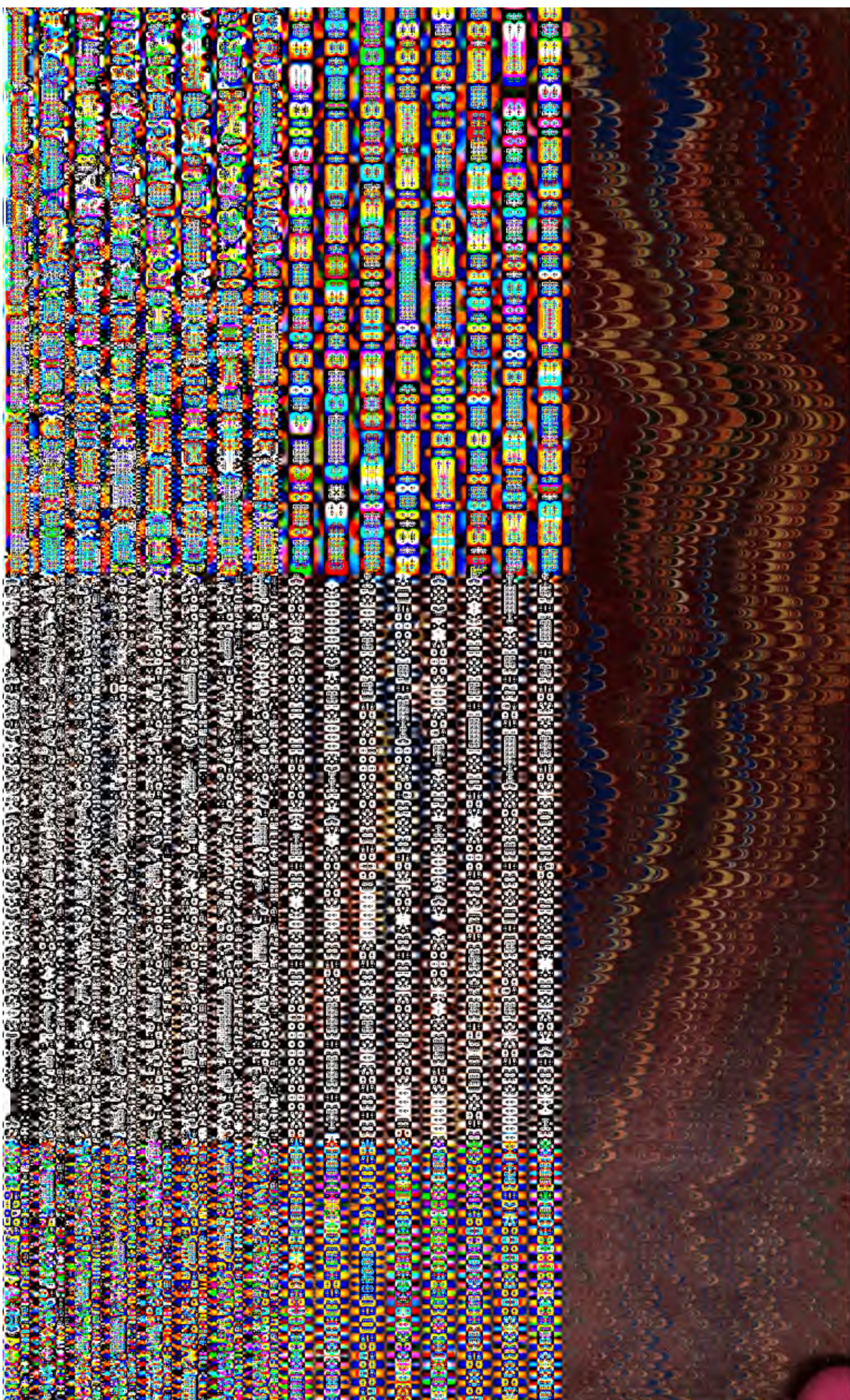




Bd. May, 1871.





ALE

BES

LCONQUE;

Barthélemy,

,

É DES SCIENCES

denter deducta principio

S. Thomas.

R-LIBRAIRE

ALE POLYTECHNIQUE,

ELIER,

ANALYSE INFINITÉSIMALE

DES COURBES

TRACÉES SUR UNE SURFACE QUELCONQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ANALYSE INFINITÉSIMALE

DES COURBES

TRACÉES SUR UNE SURFACE QUELCONQUE;

Louis Stanislas Xavier Barthélemy,

PAR

M. L'ABBÉ AOUST,

PROFESSEUR D'ANALYSE INFINITÉSIMALE A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE MARSEILLE.

Scientia ex uno evidenter deducta principio.
S. Thomas.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1869

1870, Nov: 19.
Gift of
Thomas Wren Ward,
of New York.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE QUELCONQUE.

CHAPITRE PREMIER. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

§ I. — *Des projections obliques.*

§ II. — *De la courbure inclinée.*

CHAPITRE II. — Des coordonnées tracées sur une surface.

CHAPITRE III. — Des relations entre les variations des courbures des lignes coordonnées.

CHAPITRE IV. — D'une courbe quelconque tracée sur une surface.

CHAPITRE V. — De la courbure des surfaces.

CHAPITRE VI. — Des polygones tracés sur une surface.

LIVRE II.

APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES A L'ÉTUDE PARTICULIÈRE DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

CHAPITRE PREMIER. — DES LIGNES QUI DÉPENDENT DES PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS DU PREMIER ORDRE.

§ I. — *Des bissectrices.*

§ II. — *Des lignes harmoniques.*

§ III. — *Des trajectoires orthogonales de l'une des deux lignes coordonnées.*

§ IV. — *Des trajectoires sous angle donné de l'une des deux lignes coordonnées.*

§ V. — *Trajectoire orthogonale d'une courbe donnée.*

§ VI. — *Trajectoires quelconques d'une courbe donnée.*

CHAPITRE II. — DES LIGNES QUI DÉPENDENT DES COURBURES NORMALES DES LIGNES COORDONNÉES.

§ I. — *Lignes asymptotiques.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

I. Le problème de l'analyse d'une courbe peut être posé de deux manières. Dans la première, on définit la courbe par une relation existant entre un de ses points et une ou plusieurs grandeurs géométriques. On exprime analytiquement cette relation ; cette expression porte le nom d'*équation de la courbe en termes finis*, et la résolution de cette équation fait connaître un point quelconque. Il faut, en second lieu, déduire de cette équation une autre équation, donnant la tangente en un point quelconque, et de celle-ci, une troisième, donnant la courbure de la courbe en ce point. Ensuite, on s'occupe de sa rectification, qui consiste à trouver l'expression de la longueur d'un arc de courbe compris entre deux de ses points, et de sa quadrature qui a pour but de donner l'expression de l'aire décrite par telle ligne liée intimement avec un point quelconque de cette courbe. La deuxième manière de poser le problème de l'analyse d'une courbe est inverse de la précédente. Elle consiste dans la relation qui lie un point de la courbe soit avec la tangente en ce point, soit avec la courbure, soit avec la longueur de l'arc, etc. Cette relation s'exprime aussi analytiquement, et il faut alors retrouver l'équation qui lie ce point de la courbe avec telle grandeur géométrique. Ces deux points de vue sont essentiellement distincts, et correspondent à deux analyses différentes. Il a fallu plusieurs générations de géomètres pour constituer cette double analyse, en développer les progrès, et la génération actuelle en poursuit les perfectionnements.

II. C'est à Descartes qu'est due l'idée ingénieuse de la représentation d'une courbe par une équation. C'était le premier pas vers la solution du problème de l'analyse des courbes. Ce grand géomètre détermine un point quelconque d'un plan par ses distances à deux droites données dans ce plan. Il appelle ces distances *coordonnées du point*, et il les représente par les symboles x et y; or, comme la définition de la courbe est une relation entre des grandeurs données et les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe, il en obtient immédiatement l'équation. L'étude des différentes affections de la courbe dépend alors de l'étude de cette équation. C'est ainsi qu'un problème de géométrie se trouve ramené à une question d'algèbre, pour la résolution de laquelle des règles précises sont obtenues d'une manière générale.

La conception cartésienne ne fut point stérile en résultats. Elle exerça la plus utile influence sur la géométrie. Cette conception doublait les forces du géomètre en ajoutant aux ressources géométriques les ressources de l'algèbre pour l'étude des propriétés des courbes. Aussi, le premier effet de l'union de ces deux sciences fut une classification des lignes représentées par des équations algébriques, basée sur le degré de l'équation, lequel indique le nombre des points d'intersection de la courbe avec la ligne droite. Ce caractère simple, intuitif, fut d'une fécondité telle, qu'il serait impossible d'énumérer les conséquences qui en découlèrent. Le principe de Descartes n'exerça pas une influence moins heureuse sur l'algèbre. Ce principe, en signalant les points inexplorés, ouvrait une voie nouvelle aux recherches algébriques; elle les organisait en réglant l'importance relative de ces points et l'ordre de l'exploration; enfin, elle leur donnait de la vie par la représentation physique des abstractions algébriques.

III. La deuxième partie de l'analyse d'une courbe consistait à déterminer la tangente en un de ses points. Cette question est célèbre dans l'histoire des mathématiques, non-seulement à cause des efforts des plus grands géomètres pour la résoudre, des méthodes ingénieuses, quoique particulières, inventées à cet effet par Fermat et Roberval, mais surtout parce qu'elle a été l'origine du calcul différentiel. Deux géomètres également

illustres, Leibnitz et Newton, se disputent l'honneur de la découverte de cet admirable calcul; mais, quelle que soit l'opinion que l'on adopte sur ce débat, on sait qu'ils ont imaginé, le premier, le calcul différentiel pour sa nouvelle méthode des tangentes : *Nova methodus pro tangentibus et singulare pro illis calculi genus*, 1684; le second, le calcul des fluxions, dont il fait un admirable usage dans son livre des *Principes*, 1687, et, en particulier, pour résoudre infailliblement le problème des tangentes dans le cas des expressions irrationnelles, comme dans tout autre cas. La doctrine des différentielles et la doctrine des fluxions peuvent différer au point de vue métaphysique, mais elles donnent l'une et l'autre la solution complète du problème des tangentes.

Le problème des *maxima* et des *minima*, qui occupa en même temps ces géomètres, n'est pas foncièrement distinct du précédent, puisqu'en un point correspondant à un maximum ou à un minimum, la tangente est ou bien parallèle, ou bien perpendiculaire à l'une des lignes coordonnées.

IV. La recherche du cercle osculateur d'une courbe est un problème du même ordre que le problème des tangentes; il n'est que la généralisation de ce dernier. En effet, dans la question des tangentes, il s'agit de faire passer une droite par deux points de la courbe infiniment voisins; dans la question du cercle osculateur, il s'agit de faire passer un cercle par trois points de la courbe infiniment voisins. La différentielle première de l'équation de la courbe donne la solution de la première question ; la différentielle seconde de la même équation donne la solution de la seconde. Aussi, la théorie du cercle osculateur s'est-elle présentée naturellement à l'esprit des géomètres inventeurs du nouveau calcul, comme à l'esprit de ceux qui, ayant accueilli les nouvelles doctrines, ont augmenté de leurs découvertes personnelles l'héritage qu'ils avaient reçu. Ainsi, Newton donne dans son livre des *Principes* une équation, élégante de simplicité, du rayon de courbure de la conique. L'Hôpital et les frères Bernoulli ne réussissent pas avec moins de succès lorsqu'il s'agit de déterminer, par le calcul différentiel, le cercle osculateur de la cycloïde, de l'épicycloïde, des roulettes, et, en général, de telle courbe

dont le mode de génération leur est connu. Pour être plus compliqué que le problème des tangentes, le problème du cercle osculateur n'est donc pas un problème de nature différente ; la seconde question est l'extension naturelle de la première, de même que la théorie du contact d'un degré quelconque des courbes est l'extension de l'osculation du cercle.

V. La partie de l'analyse des courbes qui se rapporte à leur quadrature et à leur rectification est une question essentiellement différente de la précédente. Ces deux questions, au point de vue purement analytique, sont inverses l'une de l'autre. Dans le problème des tangentes, l'ordonnée de la courbe est donnée en fonction de l'abscisse, et il s'agit de déterminer la différentielle de la fonction ; dans le problème des quadratures et des rectifications, c'est la différentielle d'une fonction que l'on connaît, et il s'agit de déterminer la fonction elle-même. Aussi, la solution générale de cette dernière question a-t-elle donné naissance à un calcul inverse du calcul différentiel, et auquel on a donné le nom de *calcul intégral*. Pris ensemble, ils constituent l'analyse infinitésimale, l'une des plus grandes découvertes qui honorent l'esprit humain.

De même que le problème des tangentes avait été partiellement résolu par des méthodes qui préparaient, en quelque sorte, la méthode différentielle, de même aussi le problème des quadratures avait été résolu, dans quelques cas particuliers, par des procédés ingénieux et dignes d'être conservés dans l'histoire des mathématiques. Le nom de Wallis est inséparable d'une méthode de sommation qui donne l'aire de certaines courbes algébriques. Mais, il faut l'avouer, la véritable solution du problème des quadratures, c'est le calcul intégral qui l'a donnée, comme étant à la fois la plus naturelle, la plus facile et la plus générale. Il en est de même du problème des rectifications, qui n'est pas, sous le rapport analytique, un problème distinct de celui des quadratures.

Il faut pourtant reconnaître que, si la solution de cette double question ne laisse rien à désirer au point de vue théorique, elle se trouve, dans les applications, circonscrite par

des limites que l'analyse n'a pu encore franchir, provenant des intégrations qu'elle ne sait pas effectuer, tandis que la solution du problème des tangentes ne se trouve entravée, dans la pratique, par aucun obstacle.

VI. Le problème inverse de l'analyse des courbes n'a pas été moins fécond en utiles découvertes. En effet, le cas le plus simple d'intégration consiste, quand on connaît la différentielle d'une fonction d'une variable, à remonter de cette différentielle à la fonction elle-même. Or, le problème inverse de l'analyse des courbes est plus complexe ; on connaît une relation entre les coordonnées du point et les différentielles premières de ces coordonnées, et quelquefois les différentielles d'un ordre supérieur. Ces différentielles peuvent entrer soit linéairement dans cette relation, soit élevées à une puissance supérieure. Ainsi, on possède une équation différentielle du premier ordre, si la courbe est définie par une propriété de sa tangente : l'équation est du second ordre ou d'un ordre supérieur, si elle est définie par une propriété du cercle osculateur, ou une propriété d'une courbe ayant avec elle un contact supérieur; il s'agit alors de remonter de cette équation du premier ou du second ordre, ou même d'un ordre quelconque, à l'équation entre les coordonnées d'un de ses points, indépendante de tout signe différentiel. C'est la solution de cette question générale qui constitue le but proprement dit du calcul intégral, but élevé qu'il n'a pas toujours pu atteindre. Les perfectionnements du calcul intégral sont donc liés d'une manière intime avec le problème inverse de l'analyse des courbes.

VII. Ce problème se présente quelquefois aussi sous une forme plus générale encore. On veut déterminer la courbe par cette condition, qu'une certaine combinaison de ses éléments, fonctions de signes différentiels, soit la plus grande ou la plus petite possible. Cette question, à raison de son élévation, présente de grandes difficultés. Euler et Lagrange ont dû recourir pour les surmonter à toute la puissance de leur génie; ils ont donné, l'un et l'autre, la solution de cette question, le premier dans l'ouvrage : *Methodus inveniendi*

curvas maximi vel minimi proprietate gaudentes; le second par la création d'un calcul nouveau qui a rendu les plus grands services à la géométrie, le Calcul des variations.

Telles ont été les brillantes destinées du problème général de l'analyse des courbes, d'avoir éveillé au plus haut degré l'esprit d'investigation et d'avoir produit les inventions les plus utiles. La détermination d'un point de la courbe a donné naissance à l'application de l'algèbre à la géométrie ; la question des tangentes, au calcul différentiel; celle des quadratures et des rectifications, au calcul intégral; le problème inverse de l'analyse des courbes, aux compléments, aux perfectionnements de ce calcul, et au calcul des variations. C'est ainsi que chacune des périodes de cet important problème a été l'objet d'un nouveau triomphe, et que chacune de ses étapes a été marquée d'un impérissable monument !

VIII. L'ensemble des procédés analytiques imaginés pour la résolution complète du problème des courbes constitue une doctrine plus générale que la géométrie, indépendante de cette science, et qui, considérée en elle-même, forme une science à part, ayant une vie propre ; mais l'excellence de ces procédés est mise en relief d'une manière merveilleuse par les applications qui en ont été faites à l'étude des courbes. Aussi, doit-on regarder ces méthodes comme l'instrument le plus sûr et le plus précieux pour dévoiler les propriétés géométriques. La correspondance qui existe entre l'analyse et la géométrie, sans être absolument complète, est pourtant telle, que les formes de l'équation d'une courbe venant à varier d'une manière illimitée, il en résulte un nombre égal de propriétés correspondantes de la courbe elle-même; et, comme rien n'est plus simple que de faire subir à l'équation des transformations équivalentes, il en résulte que l'on connaît, ou du moins que l'on peut connaître toutes les propriétés d'une courbe équivalentes à sa définition. Mais, comme il importe de bien saisir la portée de cette correspondance, qui n'existe pas seulement pour les équations en termes finis, mais encore pour les équations qui s'en déduisent par voie de différentiation et réciproquement, il faut en préciser et en ordonner les points les plus importants.

IX. Étant donnée l'équation d'une courbe, deux sortes d'opérations peuvent être effectuées sur cette équation ; les unes sont finies et les autres sont infinitésimales. Les premières modifient la forme de l'équation sans en altérer le sens, parce qu'aucune quantité nouvelle, soit variable, soit constante, n'a été ajoutée ni retranchée. Les secondes modifient à la fois la forme et le sens de l'équation par ce qu'elles ont ajouté ou retranché soit des quantités variables, soit des quantités constantes. C'est ainsi que la différentiation d'une équation y ajoute des variables nouvelles, qui sont les dérivées de la fonction, et elle peut en faire disparaître une ou plusieurs constantes. C'est l'inverse qui a lieu quand il s'agit d'une intégration. Supposons d'abord qu'il s'agisse de transformations résultant d'opérations finies, telles, par exemple, que les opérations algébriques; la traduction géométrique de l'équation de la courbe fait connaître deux propriétés d'un quelconque de ses points, l'une métrique qui exprime une relation entre grandeurs dont les coordonnées du point font partie, l'autre descriptive, qui fait connaître le point de la courbe comme intersection de deux lignes que l'équation met en évidence. Ces deux propriétés corrélatives sont, au fond, équivalentes entre elles. Si peu que l'équation soit modifiée dans sa forme par une opération algébrique à laquelle on l'a soumise, il y a, pour cette nouvelle forme, une nouvelle propriété métrique et une nouvelle propriété descriptive équivalentes, de sorte que ce genre de transformations est une source inépuisable de propriétés nouvelles, relatives seulement à un point quelconque de la courbe.

Les transformations qui résultent d'opérations infinitésimales ont un autre caractère. On peut toujours admettre que, par l'acte d'une première différentiation, une constante a été éliminée de l'équation, et qu'une variable nouvelle, appelée *dérivée de la fonction*, y a été introduite. Cette équation différentielle exprimera donc une propriété, soit métrique, soit descriptive de la tangente à la courbe en un de ses points ; or, cette double propriété possède ces deux caractères : le premier est qu'elle correspond à la double propriété exprimée par l'équation en termes finis; le second est qu'elle appartient à toutes les courbes de la série que l'on obtient en faisant

varier dans l'équation proposée la constante qui a été éliminée de sa différentielle. C'est ainsi que l'équation de l'ellipse, résultant de ce que la somme des distances d'un de ses points à deux points fixes est constante, entraîne comme conséquence corrélative de la tangente au même point, qu'elle fait des angles égaux avec les deux rayons vecteurs menés de ce point aux deux points fixes, et que cette propriété appartient à toutes les coniques ayant ces deux points pour foyers.

Si l'on soumet l'équation différentielle du premier ordre à une nouvelle différentiation, on aura une équation contenant une variable de plus, c'est-à-dire la dérivée du second ordre de la fonction et une constante de moins. Cette équation du second ordre exprimera une propriété, soit métrique, soit descriptive, existant entre un point de la courbe, la tangente et le rayon de courbure en ce point, et cette propriété sera : 1° corrélative de celle de la tangente exprimée par l'équation différentielle du premier ordre ; 2° commune à toutes les équations différentielles du premier ordre dans lesquelles on donnerait à la nouvelle constante éliminée toutes les valeurs possibles. Ce serait l'inverse qui aurait lieu si l'on remontait des équations différentielles à leurs intégrales.

Pour cette double raison que nous venons d'exposer, les procédés analytiques dans la théorie des courbes sont un moyen d'investigation d'une grande puissance. Si l'ensemble des propriétés des courbes constitue une mine inépuisable, l'analyse, soit finie, soit infinitésimale, est l'instrument, nous allions dire le seul instrument, en harmonie avec la richesse du sol qu'il s'agit d'explorer et d'exploiter. Il ne faut donc pas être surpris des effets merveilleux obtenus par l'application de cette double analyse à la géométrie.

X. Dans le système de coordonnées cartésien, un point quelconque du plan est déterminé par l'intersection de deux droites situées dans ce plan et parallèles à deux directions données ; les positions de ces deux droites sont déterminées par les différentes valeurs de deux paramètres qui expriment les distances de ces deux droites variables à deux droites fixes parallèles ; ces distances sont les coordonnées du point, et les deux droites correspondantes sont les droites coordonnées.

Une relation entre deux coordonnées représente une courbe. La généralisation de cette méthode est facile. Il est évident qu'un point quelconque du plan peut être déterminé par l'intersection de deux courbes situées dans ce plan, et dont les variations de forme et de position dépendent, pour chacune d'elles, de la variation d'un paramètre qui entre dans leur définition. Ces deux paramètres sont les coordonnées du point, et les deux courbes correspondantes sont les lignes coordonnées; une relation entre ces deux paramètres ou coordonnées représente une courbe dans le système général des coordonnées.

La définition d'une courbe peut varier à l'infini, à cause de la multiplicité de ses propriétés: mais chaque définition devant être apte à déterminer un point quelconque de cette courbe, fait connaître les deux lignes particulières dont ce point doit être l'intersection, de sorte que, à chaque définition de courbe, correspond un système particulier de lignes coordonnées; et, ce qu'il importe de voir, c'est que chaque courbe doit, en général, être étudiée dans le système de coordonnées qui lui convient d'après sa définition. On peut bien, si l'on veut, recourir au système cartésien, mais cette manière est sujette à deux graves inconvénients. Le premier est de donner naissance à des complications analytiques qui ne sont pas de l'essence de la question; car, de ce que le système cartésien est le plus simple géométriquement, il ne suit pas qu'il donne naissance à l'équation la plus simple de la courbe; bien loin de là, il introduit le plus ordinairement un cortége d'auxiliaires qui alourdissent la marche à tel point, quelquefois, de la rendre impossible, Le second inconvénient est l'obscurité qui résulte de l'emploi non judicieux de ce système. En effet, d'une part, les éléments propres de la question s'y trouvent défigurés par la décomposition à laquelle il a fallu les soumettre pour les plier aux exigences du système, et, d'autre part, des éléments nouveaux, étrangers à la question, ont dû s'introduire. Or ces éléments parasites prennent un rang qui ne leur est point dû, une position qui ne leur appartient pas, et leur présence obscurcit à la fois et la marche et la solution.

En général, chaque système de coordonnées appelé par la définition de la courbe doit être maintenu dans le calcul;

cette méthode est la plus correcte, la plus lumineuse. La question gagne toujours à conserver le terrain sur lequel elle est née. En effet, ce que l'on a intérêt à voir, quand on veut rester fidèle à l'énoncé du problème et à la logique de la solution, c'est comment un point de la courbe est déterminé par l'intersection des lignes coordonnées de la définition, comment la tangente de la première ligne dépend des tangentes aux deux secondes, par quels liens les cercles osculateurs de ces trois lignes se trouvent associés entre eux, et ainsi de suite ; or ces relations, si intéressantes au point de vue géométrique, si séduisantes par leur forme analytique, se montrent d'elles-mêmes quand on est fidèle au système de coordonnées désigné par la question ; au contraire, si l'on a recours à un système étranger, obligées qu'elles sont de porter la livrée de ce système, elles restent à demi voilées et souvent n'apparaissent que sous une figure d'emprunt.

XI. C'est ce qu'avaient fort bien compris les créateurs de l'analyse infinitésimale et leurs premiers disciples ; ils étudient toujours la courbe dans le système de coordonnées donné par la définition ; et, de cette manière, ils arrivent par la voie la plus simple et la plus directe aux propriétés des tangentes et des rayons de courbure, ainsi qu'à celles des quadratures et des rectifications. Cette doctrine est généralement suivie dans les ouvrages de Newton et des Bernoulli ; et l'excellent traité de L'Hôpital, consacré à l'analyse des courbes planes, semble avoir été écrit pour la justifier. Ces géomètres étaient bien plus avancés que certains auteurs modernes, qui, pour avoir voulu plier toute question sous le joug du système cartésien, sont arrivés souvent à des généralités sans interprétation, à des formules sans application ; s'ils ont quelquefois trouvé des relations simples, c'est plutôt par leur habileté personnelle que par la facilité de la méthode, qu'ils sont parvenus à obtenir ce succès.

C'est ici le cas d'examiner si le système de coordonnées curvilignes quelconques, dont on fait usage depuis quelques années et qui a produit des résultats si importants, soit en physique, soit en géométrie, est une généralisation nouvelle ou simplement ressuscitée. Le problème des coordonnées

curvilignes consiste à connaître les relations générales qui existent entre les déplacements d'un point sur une courbe quelconque non plane et les déplacements correspondants des lignes coordonnées. Ces relations forment des théorèmes entre les tangentes et les courbures de la courbe et de ses lignes coordonnées. Ce problème, à ce point de vue général, n'a été résolu que par les géomètres de ce siècle. Gauss en a donné la solution dans le cas de deux lignes coordonnées quelconques tracées sur une surface, mais non complétement, comme nous le montrerons plus loin. M. Lamé en a donné la solution dans le cas de trois surfaces coordonnées, se coupant deux à deux orthogonalement, et en a fait de brillantes et d'utiles applications aux questions de physique mathématique. Ce problème avait besoin d'une solution générale s'appliquant à un système quelconque de surfaces coordonnées, se coupant sous des angles quelconques. C'est cette solution générale que nous avons donnée dans notre théorie des coordonnées curvilignes quelconques, présentée à l'Académie des sciences en 1862 et publiée dans les *Annales de Mathématiques* de M. Tortolini, dans le courant de l'année suivante, ainsi que dans le *Journal de Mathématiques* de Crelle, année 1860 (*). Depuis cette époque, quelques-unes de nos pu-

(*) Plusieurs géomètres, qui, sans doute, n'avaient pas connaissance de notre travail, se sont occupés, après nous, du même problème et ont publié, depuis peu de temps, quelques-unes de nos formules, les unes tout à fait identiques aux nôtres, les autres équivalentes ou n'en différant que par un ou deux cosinus qui ont été supposés nuls. Or nos droits de priorité, suffisamment établis par la date de nos publications, ont été reconnus par M. Lamé, l'un des membres de la Commission chargée de l'examen de notre travail, et dont l'autorité en matière de coordonnées curvilignes ne saurait être contestée. Voici ce qu'il nous écrivait à la date du 20 décembre 1862. Nous sommes à l'aise en citant cette lettre, parce qu'elle renferme à la fois une critique et un éloge.

« Votre travail si mémorable sur les coordonnées curvilignes reçu par l'Académie dans la séance du 24 février dernier, et très-nettement défini par l'extrait inséré au *Compte rendu*, a été transmis à l'examen de deux Commissaires. Le premier en a pris rapidement connaissance. Au fond, à vous seul appartiendra désormais la généralisation complète du nouvel instrument mathématique. Mais cette généralisation n'offrait aucune application immédiate au premier Commissaire dans ses recherches incessantes, concernant la physique mathématique qui toutes exigent impérieusement l'orthogonalité; mais son intention n'est pas d'amoindrir par cette restriction un éloge si bien mérité.

» *Signé* LAMÉ, de l'Institut. »

blications ont été consacrées aux applications, dans le but de montrer l'utilité du système non orthogonal dans les questions de géométrie. Ainsi, ce n'est qu'au point de vue général que le problème des coordonnées curvilignes est un problème nouveau. Mais cela ne veut pas dire que l'emploi de ce genre de coordonnées est une invention de notre siècle. Bien loin de là, les successeurs de Leibnitz et de Newton étaient familiarisés avec l'usage de ces coordonnées, qui a été en leurs mains d'une grande fécondité et leur a permis de trouver ces relations qui nous captivent par leur forme, si remarquable d'élégance et de simplicité.

XII. La principale raison qui obligeait ces grands géomètres à rester fidèles aux coordonnées de la question, nous paraît située dans le besoin qu'ils avaient de considérer la question en elle-même et de suivre pas à pas ses transformations. C'est pour cela qu'ils effectuaient, non pas analytiquement, mais géométriquement, les différentiations elles-mêmes de l'équation fondamentale; la chose revenait foncièrement au même; mais, en opérant ainsi, ils étaient sûrs de n'avoir introduit aucun élément étranger, et ils se rendaient parfaitement compte des changements survenus.

Leur procédé peut se résumer dans les règles suivantes :

1° Exprimer comment un point quelconque est déterminé par les lignes coordonnées de la question, ce qui donne l'équation de la courbe.

2° Déterminer de la même manière un point infiniment voisin; ils obtenaient, par le déplacement de la première figure, un polygone curviligne dont certains côtés et certains angles étaient infiniment petits, et dont les côtés et les angles finis se présentaient groupés deux à deux, ne différant entre eux que par les infiniment petits. Les propriétés inhérentes à ce polygone leur donnaient une relation entre infiniment petits du premier ordre, qui était l'équation différentielle de la courbe, mais dans laquelle n'entraient que les élements de la question et leurs différentielles premières. Cette équation offrait l'avantage d'être immédiatement traduite en langage géométrique et de donner les propriétés de la tangente.

3° Passer à un troisième point, toujours par les conditions

de la question. Ils obtenaient ainsi le déplacement de la figure polygonale curviligne dont il a été question, et, par ce déplacement, une nouvelle figure polygonale dont des côtés et des angles étaient du second ordre, et dont les autres éléments étaient groupés deux à deux et ne différaient, dans chaque couple, que par les infiniment petits d'ordre supérieur au premier. Des propriétés inhérentes à ce nouveau polygone leur donnaient une équation différentielle du second ordre, dans laquelle n'entraient encore que les éléments de la question, leurs différentielles premières et secondes. Cette équation se rapportait aux courbures et s'interprétait géométriquement avec non moins de facilité que la précédente, et ainsi de suite.

XIII. Quand on réfléchit sur les moyens aussi fins que variés dont ces géomètres font usage pour établir les relations résultant de chaque polygone infinitésimal entre différentielles du premier ou du second ordre, il semble qu'il n'existe d'autre règle à suivre pour les établir que l'instinct géométrique et l'esprit de sagacité. Il n'en est pourtant pas ainsi. Cette partie si délicate de l'opération peut aussi être systématisée et soumise à une règle simple et infaillible dans laquelle sont concentrés tous les moyens dont on peut faire usage.

A chaque polygone infinitésimal appartiennent deux relations distinctes : la première, relation de quantités linéaires ; la seconde, relation de quantités angulaires. La première s'obtient évidemment en projetant le périmètre du polygone sur une direction quelconque ; on a ainsi une équation différentielle du premier ordre ; et, si l'on admet que cette direction coïncide successivement avec deux côtés du polygone formant entre eux un angle fini, on trouve deux relations simples, dépouillées de tout élément étranger à la question, et qui contiennent, comme conséquence, toutes les relations du même ordre que l'on peut obtenir par d'autres considérations géométriques. La seconde relation résulte du théorème sur la somme des angles du polygone plan et rectiligne ; car le polygone plan infinitésimal de la question peut toujours être considéré comme rectiligne, puisque les côtés curvilignes finis peuvent être remplacés par les lignes brisées infinitésimales

qui leur sont inscrites, et les arcs infiniment petits, par les cordes qui les sous-tendent.

De là résulte que si le polygone dont il s'agit est du premier ordre, la première relation se rapporte aux tangentes de la courbe et de ses lignes coordonnées, et la seconde aux angles de contingence, et par conséquent aux courbures. Elles se rapporteraient aux variations de ces lignes ou de ces angles si le polygone infinitésimal était d'ordre supérieur.

Ces deux principes recevront une pleine confirmation par les applications incessantes qui en seront faites. Il est inutile de dire que, quelle que soit celle des deux méthodes, analytique ou géométrique, que l'on suive pour effectuer les différentiations, si l'on a eu soin d'introduire, soit dans la figure géométrique, soit dans l'équation qui en est la traduction, les coordonnées de la question, on arrivera toujours à des résultats différentiels équivalents.

XIV. Restons toujours sur le terrain des courbes planes. Les diverses définitions d'une courbe ne sont pas aptes à en dévoiler la nature avec la même facilité ; les coordonnées auxquelles on la rapporte sont elles-mêmes des éléments étrangers à cette courbe. Il est facile de voir quelle serait la définition qui atteindrait ce but de la manière la plus directe. Considérons à cet effet la courbe qui nous occupe comme un polygone infinitésimal ; il ne contient que deux sortes d'éléments, les côtés et les angles que ces côtés font entre eux. Pour passer d'un sommet au suivant, il faut connaître la longueur du nouveau côté et sa déviation par rapport à celui qui le précède. Le polygone serait donc déterminé si l'on connaissait la loi des côtés et celle des déviations en fonction d'une même variable, ou, ce qui revient au même, la loi du rapport d'un côté à sa déviation du précédent. Si l'on passe à la limite, on reconnaît qu'une courbe serait définie, quant à sa nature, par la loi qui exprimerait le rapport de la longueur de l'arc élémentaire à sa déviation de l'arc élémentaire précédent, et si ce rapport était exprimé au moyen de la déviation intégrale, somme des déviations des éléments d'arc à partir de celui qui a été pris pour origine, la définition ne renfermerait que les éléments naturels de la courbe, sans mélange d'au-

cun élément étranger. Cette relation, exprimée géométriquement, serait la définition naturelle de la courbe; exprimée analytiquement, elle en serait l'équation naturelle, et les coordonnées fournies par la définition seraient les coordonnées naturelles de la courbe. Les géomètres, Euler surtout, ont quelquefois employé ce genre de coordonnées, et, il faut le reconnaître, ces idées touchent trop intimement à l'essence des choses pour qu'elles soient nouvelles.

XV. Il n'en est peut-être pas de même des conséquences qui découlent de l'analyse fondée sur ce genre de coordonnées. Voyons quels seraient les avantages et les inconvénients de cette analyse.

Le premier avantage serait de n'introduire aucune quantité auxiliaire, étrangère à la nature de la courbe, puisque l'équation naturelle donnerait le rapport de l'arc et de la déviation élémentaires en fonction de la déviation totale comptée à partir d'une certaine origine,

Le second consisterait en ce que cette équation naturelle serait un criterium facile et infaillible pour juger de l'identité de deux courbes; car les expressions des rapports de la différentielle de l'arc à la différentielle de la déviation en fonction de la déviation devraient être les mêmes dans ces deux courbes, pourvu que les déviations fussent comptées à partir de la même origine. Or, en augmentant la déviation d'une constante sous le signe de la fonction, cette déviation serait comptée à partir d'une origine quelconque, et on aurait l'expression la plus générale de ce rapport différentiel. On pourrait donc juger immédiatement de l'identité des deux courbes. C'est ainsi que, pour le genre épicycloïdal, l'équation naturelle de la courbe exprimerait que le rapport de l'arc et de la déviation élémentaires est proportionnel au cosinus de l'arc multiple de la déviation; en augmentant cette déviation sous le signe cosinus d'une constante, on aurait l'équation la plus générale de l'épicycloïde, puisqu'elle serait rapportée à une origine quelconque; il faudrait donc que l'équation naturelle de toute courbe qui appartiendrait au genre épicycloïdal se présentât sous cette dernière forme.

Le troisième avantage serait d'établir la distinction des

classes, des familles naturelles de courbes, et de faire connaître le degré de parenté de celles qui appartiennent à la même famille. On peut dire qu'une classe se trouverait caractérisée par la forme de la fonction de la déviation exprimant le rapport différentiel de l'arc et de la déviation. Or, comme sous chaque signe de fonction peuvent entrer différents paramètres, les variations des paramètres donneraient naissance à une infinité de courbes. Il est évident que la parenté des courbes provenant de la variation du même paramètre, serait plus grande que celle des courbes qui proviendraient de la variation de paramètres différents; on pourrait donc admettre que toutes les courbes qui correspondent aux différentes valeurs d'un même paramètre, sous le signe fonctionnel, appartiennent à la même famille. Les courbes d'une même famille pourraient pourtant avoir des caractères individuels tellement tranchés, que les équations de ces courbes, dans tout autre système que le système naturel, dans le système cartésien par exemple, différeraient radicalement entre elles. Pour prendre un seul exemple : dans le genre épicycloïdal, la variation du paramètre qui est facteur de la déviation sous le signe trigonométrique de l'équation naturelle, donne des courbes algébriques de tous les degrés, et des courbes transcendantes de toutes les formes. Il en est de même des courbes contenues dans le genre chaînette, etc. La richesse et la fécondité de cette analyse sont indiscutables, puisque plusieurs familles de courbes, composées chacune d'une infinité d'individus distincts, sont condensées en une seule équation naturelle, même de forme la plus simple, laquelle permet de mettre en activité chacune de ces individualités et dévoile les liens qui les unissent entre elles.

Le quatrième avantage serait de faire connaître les courbes qui dérivent les unes des autres d'après certaines lois, et de signaler le genre de dérivation qui les rattache les unes aux autres. C'est ainsi qu'on reconnaîtrait les courbes parallèles à ce caractère, que les expressions du rapport de l'arc élémentaire à la déviation élémentaire ne différeraient que par une constante; les courbes semblables et semblablement placées, à ce caractère, que les expressions de ce rapport seraient entre elles en raison constante. On obtiendrait les dévelop-

pées successives d'une courbe en prenant les dérivées successives de ce rapport. Il ne serait pas plus difficile d'obtenir les développantes, ainsi que les développées obliques, de même que plusieurs autres courbes qu'il n'entre pas dans notre but d'énumérer maintenant.

Ces avantages ne sont pas indifférents, puisque dans beaucoup de questions où des géomètres de valeur, et L'Hôpital lui-même, n'ont pas reconnu la nature de la courbe, l'emploi des coordonnées naturelles la leur aurait fait connaître d'une manière intuitive, leur montrant en même temps ses liaisons avec telle autre courbe de la question, liaisons qui sont restées cachées à leurs yeux par suite des coordonnées dont ils faisaient usage (*).

XVI. Le seul inconvénient de cette analyse consisterait dans sa généralité. L'équation qui se rapporte à la définition naturelle de la courbe est essentiellement une équation différentielle du second ordre; alors, quand on veut obtenir son équation en termes finis, on se trouve en présence d'intégrations quelquefois impossibles à effectuer. Pourtant ce problème se ramène toujours à deux quadratures distinctes. Car, en projetant l'arc élémentaire sur deux directions rectangulaires, ces deux projections sont évidemment deux différentielles, fonctions d'une seule variable, qui est la déviation; et, en les intégrant, on obtient les coordonnées d'un point quelconque de la courbe en fonction de cette variable, dont l'élimination conduit à l'équation de la courbe en termes finis dans le système de coordonnées rectilignes. Mais il est ordinairement préférable de ne pas effectuer cette élimination, et de conserver les deux coordonnées cartésiennes exprimées en fonctions de cette troisième variable, pour représenter la courbe. Souvent il sera plus simple d'étudier les propriétés de la courbe par la discussion de son équation naturelle, et il

(*) *Voyez* l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hôpital, n° 123, Exemple V. Ce géomètre détermine un point quelconque de la caustique cherchée, sans rien apprendre, contre son habitude, sur la nature de cette caustique, que l'on reconnait être une parallèle de la cycloïde dès que l'on introduit dans la question les coordonnées naturelles de la ligne cherchée. Il serait facile de multiplier ces citations.

sera nécessaire de le faire lorsque les intégrations ne pourront s'effectuer.

XVII. Le problème des courbes planes est un cas particulier du problème des courbes tracées sur une surface quelconque ; il convient de voir maintenant les modifications qui s'introduisent dans la question et dans l'analyse de la courbe par suite de la substitution d'une surface quelconque au plan.

La représentation de la courbe par une équation entre deux variables a également lieu sur la surface. En effet, un point de cette surface peut être déterminé par l'intersection de deux courbes situées sur cette surface, telles que leur variation de forme et de position dépende, pour chacune d'elles, de la variation d'un paramètre entrant dans sa définition. Les valeurs de ces deux paramètres sont les coordonnées du point ; les deux courbes correspondantes à ces valeurs sont les lignes coördonnées. Une relation entre ces deux paramètres représente donc, dans ce système de coordonnées, une ligne tracée sur la surface. Il est évident que tout ce que nous avons dit dans les nos X et XI, sur les différents systèmes de coordonnées planes, se rapporte également aux différents systèmes curvilignes au moyen desquels une courbe pent être tracée sur la surface; seulement, les raisons que l'on a de rester fidèle aux coordonnées de la définition de la courbe, empruntent une nouvelle force de la considération de la surface sur laquelle ces lignes sont situées. La réduction de l'équation au système cartésien ne servirait qu'à compliquer et à obscurcir l'analyse encore plus que lorsqu'il s'agit de courbes planes.

Il y a pourtant un système de coordonnées que l'on a souvent intérêt à introduire à cause des simplifications qui en sont la conséquence : c'est le système composé de lignes géodésiques et de leurs trajectoires orthogonales. Une ligne géodésique jouit de cette propriété, qu'elle représente sur la surface le chemin le plus court d'un point à un autre de la ligne. Cette propriété entraîne comme conséquence qu'en un de ses points, le plan osculateur de la courbe est normal au plan tangent à la surface, et, par conséquent, que la projection de l'angle de contingence de la courbe sur le plan tangent est nulle. Cette circonstance introduit une première simplifica-

tion dans les calculs; une seconde simplification résulte de ce que la seconde série de lignes coordonnées coupe orthogonalement les lignes géodésiques de la première série. Mais, pour introduire ce système, il faut qu'il ne soit pas trop éloigné de celui qui résulte de la définition de la courbe.

XVIII. Le problème de l'analyse des courbes situées sur une surface est composé des mêmes questions secondaires que lorsqu'il s'agit de courbes planes.

S'agit-il du problème direct? La détermination du point est donnée par l'équation de la courbe entre les coordonnées curvilignes de la définition. La détermination de la tangente dépend de la différentiation de cette équation; on obtient ainsi une relation entre un point quelconque de la courbe, sa tangente et les tangentes aux lignes coordonnées. La recherche de la courbure de la courbe dépend de la différentielle seconde de son équation. Cette différentielle exprime une relation entre les coordonnées du point, les tangentes aux trois courbes et les rayons de leurs cercles osculateurs. Mais ici, il s'introduit dans le calcul deux éléments qui jouent un grand rôle dans la théorie : ce sont les projections des courbures de la courbe et de ses lignes coordonnées, les unes sur le plan normal, les autres sur le plan tangent à la surface, que l'on peut appeler, pour cette raison, courbures normales et courbures tangentielles. Ces dernières ont aussi reçu le nom de *courbures géodésiques*. Mais, pour éviter une confusion qui ne manque pas de se produire lorsqu'on fait usage de coordonnées géodésiques, nous leur conservons le nom de *courbures tangentielles*. Si l'on passe à la différentielle troisième, on obtient une relation entre les variations des courbures de la courbe et des lignes coordonnées, et il s'introduit un élément appartenant exclusivement à la surface, indépendant des lignes coordonnées, auquel Gauss a donné le nom de *courbure de la surface*. La quadrature et la rectification de la courbe conservent le même sens que dans le cas des courbes planes, et s'obtiennent par une analyse tout à fait semblable.

Le problème inverse de l'analyse des courbes situées sur une surface donne aussi naissance aux mêmes questions secondaires que le problème des courbes planes, ainsi qu'à des

opérations du même ordre et qui s'effectuent de la même manière.

XIX. Il est intéressant d'examiner, en ce qui concerne les différentiations de l'équation de la courbe, si elles peuvent aussi s'effectuer géométriquement, comme nous avons vu que cela arrive pour les courbes planes, et s'il existe des principes de géométrie dont l'application uniforme donne, dans tous les cas, les relations différentielles, soit du premier, soit du second ordre.

Il est évident que le passage d'un point à un autre de la courbe, infiniment voisin, produit, quand on emploie les coordonnées de la question, un polygone infinitésimal tracé sur la surface, lequel représente la différentielle première de l'équation de la courbe, et que le passage à un nouveau point produit aussi un nouveau polygone infinitésimal qui se rapporte à la différentielle seconde, et ainsi de suite. On pourra donc aussi effectuer géométriquement les différentiations, à condition que l'on saura déduire de ces polygones les relations qu'ils contiennent. Or, lorsque les coordonnées sont géodésiques, il existe deux théorèmes qui donnent, chacun, l'une des deux relations qui appartiennent à chacun de ces polygones infinitésimaux. Le premier théorème, qui donne les relations linéaires, est dû à Gauss, et il consiste en ce que si des lignes géodésiques sont coupées orthogonalement par deux courbes, les arcs interceptés sont égaux. Le second, qui est également dû au même géomètre, donne les relations angulaires et par conséquent les relations qui lient entre elles les projections tangentielles des angles de contingence, ou les variations de ces projections, suivant l'ordre infinitésimal du polygone. Il consiste en ce que la somme des angles d'un polygone géodésique, diminué d'autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux, est égale à l'aire sphérique ou courbure intégrale du polygone. Ces deux théorèmes ont une grande importance, et le second constitue un des plus grands progrès de la géométrie des surfaces; il s'applique non-seulement au cas où le polygone est géodésique, mais encore au cas où le polygone est quelconque. En effet, quel que soit le polygone tracé sur la surface, comme on peut

inscrire à tout côté non géodésique une ligne brisée infinitésimale composée d'arcs géodésiques, on obtient un polygone auxiliaire qui est lui-même géodésique; et, en appliquant le théorème de Gauss à ce second polygone, on obtient les relations angulaires qui appartiennent au premier, qui est quelconque, ces relations se rapportant aux différentes courbures ou à leurs variations, suivant l'ordre infinitésimal de ce polygone.

On a donc aussi un procédé purement géométrique pour effectuer les différentiations des équations des courbes tracées sur une surface, et pour obtenir ces différentielles sous leur forme la plus simple et la plus utile, puisqu'elle met en relief, sans aucun élément étranger à la question, les propriétés des tangentes et des courbures des courbes dont il s'agit.

XX. Lorsqu'on veut définir une courbe non plane, sans introduire aucun élément étranger à la nature de la courbe, deux relations sont nécessaires et suffisantes : la première donnant le rapport de l'arc élémentaire à sa déviation par rapport à l'arc infiniment voisin; la seconde donnant le rapport du même arc à la déviation du plan osculateur par rapport au plan osculateur infiniment voisin. Le premier rapport pris isolément ferait connaître la courbe plane dans laquelle se transformerait la courbe proposée, si l'on développait sur un plan la surface développable dont cette dernière courbe est l'arête de rebroussement; le second rapport ferait connaître les flexions successives de cette surface pendant le développement. Mais, si l'on connaît la surface sur laquelle se trouve cette courbe, la première de ces deux relations suffit pour que la courbe soit déterminée, ou, plus simplement encore, il suffit de connaître la relation qui donne le rapport de l'arc élémentaire à la déviation de la projection de l'élément infiniment voisin sur le plan tangent, ce rapport étant exprimé en fonction de la déviation tangentielle intégrale à partir d'un certain point de la courbe. Cette relation est l'équation naturelle de la courbe par rapport à la surface qui la contient; les coordonnées naturelles sont, d'une part, l'arc compté à partir d'un certain point et l'angle égal à la somme des déviations élémentaires tangentielles, à partir de la même origine.

Tous les avantages que nous avons signalés, comme appartenant à l'analyse qui résulte de la définition naturelle des courbes planes et du système de coordonnées qui s'y rapporte, appartiennent aussi, sans restriction, aux courbes situées sur une surface, définies par leurs équations naturelles par rapport à cette surface. Il semble même que cette analyse devienne plus importante, lorsqu'on veut soumettre l'étude de ces courbes à une méthode uniforme et régulière. Les applications nombreuses que nous ferons de ce genre d'analyse serviront à en préciser le caractère et à en montrer les avantages.

XXI. Malgré toutes ces analogies entre l'analyse des courbes planes et l'analyse des courbes tracées sur une surface, la seconde présente des difficultés d'un ordre élevé, qui proviennent de l'équation de la surface qui s'introduit forcément dans les calculs. Or une grande simplification résulte de l'introduction que nous avons faite dans cette théorie d'un élément nouveau, auquel nous avons donné le nom de *courbure inclinée.*

Simple par sa définition, puisque c'est le rapport de l'angle des tangentes à deux courbes infiniment voisines de l'une des deux séries des lignes coordonnées à l'arc qu'elles déterminent sur une courbe de l'autre série, cette courbure n'offre rien que de précis, soit dans son intensité, soit dans sa direction.

Complexe dans sa composition, elle comprend, les concentrant en un seul, plusieurs éléments géométriques qu'il faudrait considérer et manier successivement. En effet, la composante normale de cette courbure a une expression linéaire par rapport aux composantes normales de la courbure propre de l'une des deux lignes coordonnées et de la seconde courbure géodésique; sa composante tangentielle n'a pas une expression moins significative, puisqu'elle est la somme de la courbure tangentielle de la même ligne coordonnée et du rapport différentiel de l'angle des lignes coordonnées à l'arc de l'une d'entre elles. Ces deux théorèmes ont, en outre, le double avantage de rendre la courbure inclinée indépendante de tout système coordonné, et applicable à la fois aux calculs et aux démonstrations.

De là résulte que cet élément devient un instrument précieux de recherches : il donne du laconisme au langage, par la condensation de plusieurs notions en une seule, de l'aisance à la marche analytique par la suppression de longs calculs, de la vie aux formules par la réalité géométrique dont elle revêt les symboles algébriques. C'est grâce à la présence de cet élément, dont nous avons fait un usage incessant dans nos recherches déjà publiées, que nous avons donné à ces recherches une simplicité dont les géomètres ont bien voulu nous tenir compte. C'est au secours que nous a fourni cet élément, que nous devons d'avoir pu traiter dans toute sa généralité le problème de l'analyse des courbes sur une surface quelconque.

XXII. Ce problème si intéressant a provoqué de très-remarquables travaux dus à de très-habiles géomètres, à la tête desquels se place l'illustre Gauss, auteur des belles recherches sur les surfaces courbes. Cet ouvrage, qu'on ne saurait trop méditer, contient les principes les plus simples, les plus féconds de la géométrie des surfaces; mais l'auteur n'établit que les relations qui se rapportent aux courbures tangentielles des lignes, et ne s'occupe pas des courbures normales, qui donnent pourtant naissance à des relations non moins intéressantes. Les successeurs de ce grand géomètre se sont inspirés de ses travaux, et ils n'ont pas peu contribué à vulgariser ses découvertes, soit par de belles démonstrations géométriques, soit par des études particulières qui leur font le plus grand honneur. Qu'il nous suffise de citer les noms de MM. Liouville, Lamé, Bonnet, Bertrand, Serret, auxquels il faut ajouter celui d'Edmond Bour, enlevé sitôt au culte des sciences exactes, qui lui donnèrent et qui lui promettaient de si belles conquêtes. Puissions-nous avoir l'autorité qui nous manque pour donner à tous en général, et à chacun en particulier, la juste part d'éloges qui leur sont dus, à cause des progrès d'analyse et de géométrie accomplis par eux ou sous leur inspiration ! C'est à l'un de ces maîtres de la science que revenait la mission d'écrire le livre que nous nous décidons, malgré nous, à publier. Cette mission, ils l'auraient sans doute acceptée, s'ils n'avaient été détournés de ce but par l'attrait de hautes études et la solution de questions plus importantes.

XXIII. Comme nous venons de le dire, notre livre consiste à présenter dans tout son développement le problème de l'analyse des courbes tracées sur une surface, et à montrer tout ce qu'il gagne en simplicité dans ses différentes phases, par suite de l'introduction des courbures inclinées. Écrit sous l'influence d'une pensée unique, il conserve toujours la même uniformité de marche, la même fidélité au principe fondamental. Cette régularité gêne quelquefois l'élan du géomètre, mais elle le guide, et le lecteur aime à voir, dans une méthode régulière, la possibilité d'atteindre la solution des questions les plus variées.

Comme le but que nous nous sommes proposé a été d'étudier les courbes situées sur une surface par l'analyse la plus simple, et de montrer comment elle procède pour traiter toutes les questions que l'on peut se proposer sur cette matière, le livre que nous publions est un livre d'analyse et non de géométrie. La marche analytique est donc celle que nous avons dû préférer. Il nous aurait pourtant été facile d'établir toutes nos formules fondamentales par la géométrie, mais, par là, nous aurions altéré le caractère d'unité que nous tenions principalement à lui donner. Le rôle de la géométrie ne devait pourtant pas être nul; aussi, l'avons-nous fait intervenir toutes les fois qu'il s'agissait d'interpréter les formules, de manière que leur signification fût clairement établie, comme cela doit être quand il s'agit de l'étude des courbes.

La méthode analytique que nous avons suivie est celle dont nous avons déjà fait usage dans notre *Théorie des coordonnées curvilignes*. Outre ses avantages généraux, cette analyse en contient de particuliers non moins précieux. Elle dévoile les liens intimes entre cette théorie et celle des lignes tracées sur une surface, elle sert de fil conducteur pour arriver sûrement à la solution des questions correspondantes de ce second problème, elle montre que les relations qui forment cette solution sont ou bien identiques à celles du premier problème, ou bien implicitement renfermées dans celles-ci, et que toujours il sera facile de les obtenir, soit par un calcul direct, soit en les évoquant des formules générales.

XXIV. Voici maintenant la division que nous avons suivie. La première Partie est relative à la théorie générale des courbes en tant que tracées sur une surface. Nous établissons les relations qui existent soit entre les lignes coordonnées, soit entre la courbe et les coordonnées auxquelles on les rapporte. Ces relations sont de deux sortes : les unes regardent les courbures tangentielles, les autres les courbures normales. Les premières étaient déjà connues sous leur forme la plus générale, il n'en était pas de même des secondes qui n'avaient été données que dans des cas particuliers. L'introduction de la courbure inclinée permet d'établir ces deux sortes de formules, au point de vue le plus général, tout en leur conservant une forme aussi simple que celle qui résulterait d'une hypothèse particulière; le propre de cette courbure est d'être un élément de généralisation, qui s'incorpore dans la formule pour la simplifier d'autant plus que cette formule est plus générale. Du reste, ces relations sont elles-mêmes des cas particuliers des relations se rapportant à un système quelconque de trois surfaces coordonnées et déjà publiées par nous en 1862, dans notre *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques*. Il suffit de faire deux cosinus nuls dans les secondes pour retrouver les premières, ce qui revient à dire que deux surfaces coupent orthogonalement la troisième.

La seconde Partie est consacrée aux applications des formules établies dans la première. Le nombre des questions résolues est très-grand, trop grand peut-être, mais ce n'est que par les exemples que l'on peut montrer comment cette théorie s'associe à l'analyse infinitésimale. Ces différentes questions forment trois catégories distinctes. La première contient les questions qui ne dépendent que des paramètres différentiels du premier ordre, et dont les équations différentielles sont généralement du premier ordre et du premier degré. La seconde se rapporte aux lignes qui dépendent des courbures normales, et dont les équations différentielles sont du premier ordre et du second degré. La troisième a trait aux lignes qui dépendent des courbures tangentielles, et dont les équations différentielles sont du second ordre ou d'un ordre supérieur. Plusieurs de ces questions nous sont personnelles, d'autres ont déjà été traitées par les géomètres, mais la fidélité

qu'il nous fallait conserver pour notre méthode, afin de ne pas compromettre le plan de l'ouvrage, en a fait pour nous des questions nouvelles.

La troisième Partie est spécialement consacrée à l'étude des courbes dans le système de coordonnées géodésiques et dans les systèmes qui en dépendent. Ces systèmes ne sont pas nouveaux, mais l'étude générale des courbes dans ces systèmes était susceptible d'être approfondie. Aussi la plupart des formules que nous en avons déduites sont nouvelles, soit en elles-mêmes, soit par la forme simple que nous leur avons donnée, par suite de l'introduction de la courbure inclinée. Nous avons montré, par de nombreux exemples, combien cette analyse est générale, comment elle facilite les calculs, et avec quelle simplicité elle se prête à l'étude des courbes d'après leurs équations naturelles.

XXV. L'ouvrage que nous offrons aux géomètres, sur l'*Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface*, se compose principalement de nos recherches personnelles sur cet important sujet, les unes déjà anciennes et publiées par nous à diverses époques, et les autres entièrement nouvelles et inédites. Il convient que nous distinguions les unes des autres, et la justice nous fait un devoir, à cause des géomètres qui ont écrit sur la même matière, de donner les dates précises des premières avec les pièces justificatives.

Livre premier. — Le premier Chapitre, relatif à la définition et aux diverses expressions de la courbure inclinée, se trouve implicitement renfermé dans notre *Théorie des coordonnées cuvilignes*, 1862, et explicitement dans notre Mémoire sur un double système de surfaces réglées, publié en 1866 dans les *Mémoires de l'Association Scientifique de France.*

Les Chapitres II et III, consacrés aux coordonnées curvilignes quelconques tracées sur une surface, sont la reproduction de nos recherches sur ce sujet : *Journal de Crelle*, t. LVIII, 1860; *Annales de Mathématiques*, de M. Tortolini, t. VI. Lorsque les formules se rapportent à une surface, nous n'avons rien à y changer, elles sont littéralement reproduites; lorsqu'elles se rapportent à deux ou trois des surfaces coor-

données, nous n'avons eu besoin que d'y faire nuls un ou deux cosinus.

Le Chapitre IV est une étude sur les propriétés d'une courbe quelconque tracée sur une surface; écrite depuis plusieurs années, cette étude n'a pas été publiée jusqu'à ce jour.

Le Chapitre V, qui a pour objet la courbure des surfaces, se compose de deux parties qui ont été présentées à l'Académie des Sciences de Paris : la première, en 1863, sous le titre de la *Courbure des surfaces;* la seconde, en 1867, sous le titre de *Rôle de la courbure inclinée dans la théorie des lignes tracées sur une surface.* Les principaux résultats ont été publiés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LVI et t. LXV, et la première partie a été imprimée *in extenso* dans la *Revue des Sociétés savantes,* t. VI.

Le Chapitre VI, sur les polygones tracés sur une surface, est un travail dont quelques points seulement ont été publiés dans le journal *l'Institut,* décembre 1867, février 1868.

Livre deuxième. — Il ne renferme qu'un petit nombre de questions déjà publiées par nous. Ce sont, dans le Chapitre I : Des trajectoires sous angle constant des lignes tracées sur les surfaces de révolution (*Journal de M. Liouville,* t. XI, 1846); Des trajectoires orthogonales des lignes ellipsoïdales (nos *Recherches sur les surfaces du second ordre,* 1864). Dans le Chapitre II : Des lignes de courbure (*Comptes rendus,* 1867); Des lignes ellipsoïdales conjuguées (nos *Recherches sur les surfaces du second ordre*). Dans le Chapitre III : De la ligne géodésique ellipsoïdale et des questions qui en dépendent (*Compte rendus,* t. L, 1860). Toutes les autres questions sont nouvelles, du moins en ce sens qu'elles n'ont jamais été publiées par nous, et que la solution que nous en donnons résulte de notre théorie.

Livre troisième. — Il a plusieurs points de contact avec un Mémoire présenté par nous à l'Académie des Sciences de Paris, en 1850, sous le titre : *Des développées imparfaites conjuguées des courbes planes.* Ce sont les mêmes principes, les mêmes procédés, la même analyse, nous allions dire les mêmes équations, si les questions relatives aux courbes situées sur une surface n'exigeaient un principe nouveau, re-

présenté par le théorème de Gauss, dont l'introduction forcée dans ces dernières questions modifie les équations relatives aux courbures. Mais cette modification complète les formules par l'addition de nouveaux termes, sans altérer les formes qui existaient dans le cas des courbes planes. Toutefois, à raison des termes nouveaux qui s'introduisent, et de la généralisation qui en résulte pour le problème des lignes tracées sur une surface, le travail contenu dans ce troisième Livre est distinct de celui que nous avons mentionné, et toutes ses parties sont inédites jusqu'à ce jour.

XXVI. D'après ce que nous avons dit jusqu'à présent, notre livre n'a pas pour fin de présenter l'énumération des propriétés déja connues des courbes non planes, ainsi que les remarquables travaux des géomètres sur ces questions, il est destiné à systématiser les recherches que l'on peut faire sur ce sujet, en les faisant dépendre d'une analyse régulière. C'est un livre didactique sur l'analyse des courbes, dont le but est de montrer comment on peut traiter les diverses questions de géométrie curviligne. Les préceptes y sont confirmés par des exemples, et les applications font connaître l'esprit de la méthode. La solution des questions particulières y est portée assez loin pour pouvoir être terminée par ceux qui voudraient la connaître à fond.

Malgré tous les soins que nous avons pris, nous ne saurions nous promettre que quelques erreurs de calcul ne se sont pas glissées dans les nombreuses applications que nous avons faites de la théorie. Dans les ouvrages d'une certaine étendue, écrits pour mettre en relief l'unité de méthode et sa puissance, tous les calculs devant être exécutés par un seul, les erreurs deviennent presque inévitables. Mais, si elles existent, elles seront faciles à reconnaître, et ne porteront nullement atteinte à la méthode elle-même, qui pourra toujours être employée à les corriger.

ANALYSE INFINITÉSIMALE

DES COURBES

TRACÉES SUR UNE SURFACE QUELCONQUE.

LIVRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE QUELCONQUE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

§ I. — Des projections obliques.

1. *Projection sur un plan.* — Si d'un point A l'on mène une parallèle à une droite donnée jusqu'à la rencontre d'un plan P donné de position, l'intersection a de cette parallèle avec le plan P est la projection du point A suivant la droite donnée. La droite parallèle à la droite donnée est dite *ligne projetante*; le plan donné, *plan de projection*. Si la droite est perpendiculaire au plan, la projection est dite *orthogonale*.

Soit une courbe C, si l'on projette suivant une direction donnée les différents points de cette courbe, le lieu des projections de ces points est une courbe c, qui est appelée *projection de la courbe* C; le lieu des droites projetantes est un cylindre appelé *cylindre projetant*.

Soit une aire plane Ω limitée par des courbes quelconques, si l'on projette les courbes limites sur un plan, suivant une direction donnée, les projections de ces courbes limiteront une aire ω qui sera la projection de l'aire donnée Ω.

2. *Projection sur une droite.* — Si d'un point A de l'espace l'on mène un plan parallèle à un plan donné, jusqu'à la rencontre d'une ligne donnée, l'intersection a est la projection du point A sur la ligne donnée, suivant le plan donné. La ligne qui joint le point A avec sa projection a est dite *ligne projetante*. Si le plan donné est perpendiculaire à la droite donnée, la projection est dite *orthogonale*. Si l'on projette les extrémités d'une longueur AB, sur une ligne suivant un plan donné, le segment ab compté sur cette ligne entre les projections des extrémités est la projection de la longueur AB.

Soit un contour quelconque terminé à deux points A et B de l'espace, et un point mobile M partant de A, et parcourant ce contour jusqu'au point B, il est évident que la projection m du point M se mouvra sur la ligne de projection. Or ce point pourra se mouvoir sur cette ligne tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre : si ce point se meut dans un sens déterminé, la projection parcourue sera *positive;* s'il se meut en sens contraire, la projection parcourue sera *négative*. D'après cela, l'on a la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Quel que soit le chemin que suive un point mobile pour aller d'un point* A *de l'espace à un autre* B, *la somme algébrique des longueurs parcourues par la projection du point mobile est constante et égale à la projection de la droite* AB.

Corollaire. — Si le contour est fermé, la somme algébrique des projections des éléments du contour est nulle.

3. *Expression algébrique de la projection d'une longueur.*

THÉORÈME II. — *La projection l d'une longueur* L *sur une ligne t parallèlement à un plan, est égale à cette longueur multipliée par le rapport des cosinus des angles que la normale au plan fait avec la longueur donnée et avec sa projection.*

Soit n cette normale, les projections orthogonales de L et de l sur la droite n sont égales; de là résulte que l'on a

$$l = \mathrm{L}\,\frac{\cos(\mathrm{L}, n)}{\cos(l, n)}.$$

Corollaire. — Si les côtés d'un polygone fermé sont L_1,

$L_2, \ldots, L_n$, l'on a, le signe $\sum$ s'étendant à tous les côtés,

$$\sum L \frac{\cos(L, n)}{\cos(l, n)} = 0.$$

4. *Expression algébrique de la projection d'une aire.*

THÉORÈME III. — *La projection d'une aire plane sur un plan parallèlement à une droite, est égale à cette aire multipliée par le rapport des cosinus des angles que le plan perpendiculaire à cette droite fait avec l'aire plane et le plan de projection.*

Soit Ω l'aire d'une face plane, ω sa projection sur le plan, parallèlement à la direction donnée ; soit mené un plan perpendiculaire à cette direction : les projections orthogonales de Ω et de ω sur ce plan se confondent en une seule u. On aura donc

$$\omega = \Omega \frac{\cos(\Omega, u)}{\cos(\omega, u)}.$$

5. *Réciprocité.* — Si, par un point on mène deux droites perpendiculaires aux deux faces Ω, ω, et un plan P perpendiculaire à la droite projetante du numéro précédent ; si, à partir du même point on prend sur la normale au plan Ω une longueur L proportionnelle à cette aire, et qu'on projette la longueur L sur la normale à la face ω suivant le plan P, en appelant l cette projection, les longueurs L et l seront proportionnelles aux deux aires Ω et ω.

En effet, l'on a, d'après le n° 3,

$$L = l \frac{\cos(\omega, u)}{\cos(\Omega, u)};$$

donc, en comparant avec l'équation précédente, l'on aura

$$\frac{L}{l} = \frac{\Omega}{\omega}.$$

THÉORÈME IV. — *Si l'on projette une aire plane Ω sur trois plans coordonnés obliques parallèlement aux trois axes ; si, par l'origine, on élève sur chacun des trois plans une normale*

proportionnelle à la projection faite sur ce plan, et qu'on achève le parallélipipède des trois normales, la diagonale menée de l'origine sera normale et proportionnelle à l'aire plane Ω.

C'est une conséquence évidente du principe énoncé au commencement du présent numéro.

Corollaire. — Si l'on connaît les trois projections obliques ω, ω_1, ω_2 de l'aire Ω, cette aire ainsi que les angles qu'elle fait avec les trois plans coordonnés seront donnés par les même relations qui lient la diagonale et les trois côtés contigus d'un parallélipipède avec les angles qu'elle fait avec ces trois côtés. On aura donc les deux relations

$$\Omega\cos(\Omega,\omega) = \omega\cos(\omega,\omega) + \omega_1\cos(\omega,\omega_1) + \omega_2\cos(\omega,\omega_2),$$
$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega\omega_1\cos(\omega,\omega_1)$$
$$+ 2\omega_1\omega_2\cos(\omega_1,\omega_2) + 2\omega_2\omega\cos(\omega_2,\omega).$$

6. *De la perpendiculaire au plan de deux droites.* — Soient deux droites c, c' de longueur donnée, situées dans un plan, et les projections obliques x, y, z, x', y', z' de ces deux droites sur les axes d'un système de coordonnées obliques. Calculons l'aire ω_2 du parallélogramme dont deux côtés contigus seraient égaux et parallèles aux projections obliques c_2, c'_2 des deux droites données sur le plan des xy, en appelant ε, ε' les angles que l'axe des x fait avec c_2, c'_2, l'on a

$$\omega_2 = c_2 c'_2 \sin(\varepsilon' - \varepsilon),$$
$$c_2 \sin\varepsilon = y\sin(x,y), \qquad c'_2\sin\varepsilon' = y'\sin(x,y),$$
$$c_2\cos\varepsilon = y\cos(x,y) + x, \quad c'_2\cos\varepsilon' = y'\cos(x,y) + x'.$$

Si l'on porte les valeurs des sinus et des cosinus des angles ε, ε' tirées de ces quatre dernières équations dans la précédente, l'on obtient

$$\omega_2 = \sin(x,y)(xy' - yx').$$

ω_2 est égale à la projection oblique sur le plan des xy de l'aire Ω du parallélogramme dont deux côtés contigus seront égaux et parallèles à c, c'. Les valeurs des projections ω, ω_1 de l'aire du même parallélogramme se déduisent de la formule précédente par la permutation rotatoire. Si l'on a égard à ces va-

leurs, la dernière formule du numéro précédent fait connaître la valeur de Ω^2, tandis que l'avant-dernière formule du même numéro donne les angles que la perpendiculaire au plan de Ω, c'est-à-dire au plan des deux droites, fait avec les normales aux plans coordonnés.

7. *Angle de deux droites.* — Calculons d'abord cet angle en fonction des projections obliques des longueurs de ces droites sur les trois axes coordonnés. Si l'on remarque que l'on a

$$\Omega = c\,c' \sin(c, c'),$$

en substituant cette valeur de Ω et les valeurs de ω, ω_1, ω_2, trouvées dans le numéro précédent, dans la dernière formule du n° 5, on obtient la valeur de $\sin(c, c')$ en fonction des rapports des projections obliques des deux droites c, c' à ces deux droites. Cette expression, qu'il est inutile de transcrire, s'obtient immédiatement.

Calculons, en second lieu, le cosinus de l'angle des deux droites en fonction de lignes trigonométriques. Les deux expressions que nous allons donner de ce cosinus sont d'une grande utilité pour certaines transformations analytiques.

Soit une ligne OC égale à T. Formons le parallélipipède dont T est la diagonale, et dont les arêtes, suivant la direction des trois axes coordonnés, sont t, t_1, t_2. Concevons le système de coordonnées obliques formé par trois axes normaux aux plans coordonnés du système donné, et formons le parallélipipède oblique dont T est la diagonale et dont les arêtes n, n_1, n_2 sont issus du point O dans la direction des trois axes de ce second système. D'après cela, si l'on considère le premier parallélipipède, on aura, d'après le théorème IV, n° 5, ou, ce qui revient au même, en projetant orthogonalement le périmètre du polygone $t\,t_1\,t_2\,\mathrm{T}$ successivement sur n, n_1, n_2,

$$t\cos(n, t) = \mathrm{T}\cos(\mathrm{T}, n), \quad t_1\cos(n_1, t_1) = \mathrm{T}\cos(\mathrm{T}, n_1),$$
$$t_2\cos(n_2, t_2) = \mathrm{T}\cos(\mathrm{T}, n_2).$$

Or, si l'on projette orthogonalement le périmètre du polygone $t\,t_1\,t_2\,\mathrm{T}$ sur une direction donnée N, on aura

$$\mathrm{T}\cos(\mathrm{T}, \mathrm{N}) = t\cos(\mathrm{N}, t) + t_1\cos(\mathrm{N}, t_1) + t_2\cos(\mathrm{N}, t_2),$$

et, en substituant les valeurs de t, t_1, t_2 tirées des équations précédentes, on aura

$$\cos(\mathrm{T},\mathrm{N}) = \frac{\cos(\mathrm{T},n)\cos(\mathrm{N},t)}{\cos(n,t)} + \frac{\cos(\mathrm{T},n_1)\cos(\mathrm{N},t_1)}{\cos(n_1,t_1)} + \frac{\cos(\mathrm{T},n_2)\cos(\mathrm{N},t_2)}{\cos(n_2,t_2)}.$$

Si l'on opère de la même manière sur le second parallélipipède, et qu'on projette orthogonalement le périmètre du polygone fermé $n\,n_1\,n_2\,\mathrm{T}$ successivement sur t, t_1, t_2 et sur N, on aura d'abord quatre équations analogues aux précédentes, et finalement

$$\cos(\mathrm{N},\mathrm{T}) = \frac{\cos(\mathrm{T},t)\cos(\mathrm{N},n)}{\cos(t,n)} + \frac{\cos(\mathrm{T},t_1)\cos(\mathrm{N},n_1)}{\cos(t_1,n_1)} + \frac{\cos(\mathrm{T},t_2)\cos(\mathrm{N},n_2)}{\cos(t_2,n_2)},$$

laquelle se déduit aussi directement de la précédente.

Ces formules font connaître le cosinus de l'angle de deux droites en fonction des cosinus des angles que la première fait avec les trois axes coordonnés, et des cosinus des angles que la seconde fait avec les trois arêtes du trièdre supplémentaire de celui qui est formé par les trois axes.

§ II. — De la courbure inclinée.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'étudier d'une manière générale la courbure inclinée des lignes quelconques et d'en déduire les propriétés qui les caractérisent.

8. *Tangente.* — Si l'on considère sur une courbe deux points A et A' infiniment voisins : leur distance AA' est l'élément curviligne ds ou bien la différentielle de l'arc de cette courbe ; la direction de cet élément est la direction de la tangente à la courbe au point A. Soit cette courbe rapportée à des coordonnées rectilignes orthogonales ; dx, dy, dz les projections de l'élément ds sur les trois axes, et α, β, γ les angles

que le déplacement ds fait avec ces axes; on a

$$(1) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Plan normal. — Le plan normal à la courbe au point A est le plan qui, en ce point, est perpendiculaire à la tangente à la courbe. L'équation de ce plan dans le système rectiligne orthogonal s'obtient par cette considération, que, si l'on joint le point A, dont les coordonnées sont x, y, z, à un des points quelconques x', y', z' du plan, le cosinus de l'angle de cette longueur avec l'élément ds doit être nul, ce qui donne, le signe $\sum$ s'étendant aux trois coordonnées,

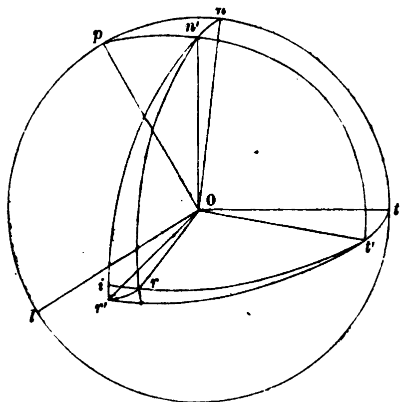
$$\sum (x - x')\,dx = 0.$$

9. *Relations entre les variations angulaires d'une série de droites mobiles.* — Le mouvement d'une droite dans l'espace, s'appuyant par un de ses points sur une courbe quelconque, donne naissance au mouvement d'une seconde et d'une troisième droites passant par ce point et satisfaisant à cette condition, que la seconde est perpendiculaire à deux positions infiniment voisines de la droite donnée, tandis que la troisième est perpendiculaire au plan des deux autres. Or il existe entre les variations angulaires de ces droites mobiles des relations remarquables qui nous seront souvent utiles, et que nous ne pouvons nous empêcher d'exposer.

(*a*) *Trièdre trirectangle dérivant du déplacement d'une droite.* — Soit une droite dont un point déterminé parcourt une courbe donnée, la direction de cette droite variant d'après une loi aussi donnée. Marquons, à partir du point O (*fig.* 1), où la droite, dans une de ses positions, coupe la courbe, la direction positive de cette droite; supposons que du même point O comme centre une sphère soit décrite d'un rayon égal à l'unité, et soit t le point où sa surface coupe la partie positive de la droite; soit t' l'extrémité du rayon de cette sphère parallèle à la direction positive de la ligne infiniment voisine; l'arc de grand cercle qui va de t en t' est connu en grandeur et en direction. Menons du point O un rayon Or parallèle à

cette direction; si du même point nous élevons un rayon On perpendiculaire au plan tOt', du côté où le mouvement de Ot vers Or est vu de gauche à droite par un spectateur placé sui-

Fig. 1.



vant la direction On, cette direction sera prise positivement. Les trois rayons positifs Ot, Or, On forment un trièdre trirectangle : la considération de ce trièdre est d'une grande utilité.

(*b*) *Trièdre trirectangle infiniment voisin.* — Soit Ot'' un rayon parallèle à une troisième position de la droite; les deux rayons infiniment voisins Ot', Ot'' donnent naissance à un second trièdre trirectangle dont les arêtes sont Ot', Or', On': ce trièdre est formé d'après la même loi que le précédent. Les trois arcs tt', nn', rr' jouissent des propriétés suivantes.

Les arcs tt', nn', formés par les positions infiniment voisines des rayons Ot, On, ont la même direction ou des directions opposées. En effet le point t' est éloigné d'un quadrant des points n, n', r'; d'ailleurs Or' est perpendiculaire sur On'; donc à la limite l'arc nn' sera parallèle au rayon Or' et par conséquent à Or. Mais Or est parallèle à l'arc tt'; donc, etc. L'arc nn' sera pris positivement s'il a la même direction que Or, et négativement s'il a une direction contraire.

Les trois arcs tt', nn', rr' sont en grandeur les trois côtés d'un triangle rectangle dont rr' est l'hypoténuse.

Les trois points t, t', r sont situés sur un arc de grand cercle, les trois points n, n', r' sont aussi situés sur un arc de grand cercle qui coupe en i le premier orthogonalement; or, dans le triangle rectangle infiniment petit $rr'i$, on a l'arc ir' égal à l'arc nn', puisque les points n, n' sont les pôles des deux grands cercles rt', $r't'$ qui forment entre eux un angle mesuré par l'arc ir'; on a aussi l'arc ir égal à l'arc tt' par une raison semblable. On voit par là que si un trièdre trirectangle est formé d'après la loi précédente, dans une seconde position de ce trièdre, les déplacements angulaires infiniment petits des arêtes sont entre eux comme les trois côtés d'un triangle rectangle; on a donc

$$\overline{rr'}^2 = \overline{tt'}^2 + \overline{nn'}^2. \tag{1}$$

(*c*) *Trièdre relatif aux déplacements de* Or. — Construisons le trièdre trirectangle relatif aux deux positions infiniment voisines Or, Or'. Soit Ol le rayon parallèle à l'arc rr' et Op le rayon perpendiculaire au plan Orr'. Les propriétés de ce trièdre sont les suivantes.

1° Les deux rayons Op, Ol se trouvent dans le plan tOn. En effet, Op est l'intersection de deux grands cercles nOt, n'Ot' dont les points r, r' sont les pôles. D'une autre part, la direction rr' étant perpendiculaire au rayon Or, le rayon Op parallèle à cette direction ne peut se trouver que dans le plan nOt perpendiculaire à Or.

2° L'angle que Op fait avec On a pour sinus le rapport de l'arc nn' à l'arc rr'. En effet les deux droites On, Op sont perpendiculaires, chacune à chacune des deux faces irO, $r'r$O; donc l'angle dièdre formé par ces deux faces est égal à l'angle plan pOn; donc, etc. Il résulte de là que l'on a

$$\cos p\mathrm{O}t = -\frac{nn'}{rr'}, \quad \cos p\mathrm{O}n = \frac{tt'}{rr'}.$$

3° Si l'on projette le périmètre du triangle irr' sur un rayon quelconque Ox, on aura

$$rr'\cos(l, x) + tt'\cos(t, x) + nn'\cos(n, x) = 0. \tag{2}$$

4° Puisque Op est dans le plan nOt, on aura

$$\cos p\mathrm{O}x = \cos p\mathrm{O}n \cos n\mathrm{O}x + \cos p\mathrm{O}t \cos t\mathrm{O}x,$$

et, en ayant égard aux valeurs ci-dessus trouvées,

$$(3)\qquad rr' \cos p\mathrm{O}x = tt' \cos n\mathrm{O}x - nn' \cos t\mathrm{O}x.$$

5° Construisons le trièdre infiniment voisin dont les arêtes seront $\mathrm{O}r''$, $\mathrm{O}l'$, $\mathrm{O}p'$; l'angle $p\mathrm{O}p'$ est la différentielle de l'angle $p\mathrm{O}t$, puisque l'inclinaison du plan $p\mathrm{O}p'$ sur le plan $t\mathrm{O}p$ est infiniment petite; on a donc l'équation

$$(4)\qquad d\left(\arccos = \frac{tt'}{rr'}\right) = p\mathrm{O}p',$$

à laquelle il faut joindre

$$\overline{pp'}^2 = \overline{ll'}^2 - \overline{rr'}^2.$$

De là résulte que les déplacements des arêtes du trièdre $\mathrm{O}rpl$ sont intimement liés aux déplacements des arêtes du trièdre $\mathrm{O}trn$, de manière que l'on peut déterminer à chaque instant les premiers déplacements en fonction des seconds.

(*d*) *Trièdre relatif au déplacement de* $\mathrm{O}n$. — Le trièdre trirectangle déterminé par deux positions infiniment voisines du rayon $\mathrm{O}n$ est tel, que la première arête étant $\mathrm{O}n$, la seconde sera $\mathrm{O}r'$ ou son prolongement, la troisième sera $\mathrm{O}t'$ ou son prolongement; de là résulte que les déplacements des arêtes seront les mêmes que ceux des arêtes du trièdre déterminé par deux positions infiniment voisines de $\mathrm{O}t$, que nous avons considéré le premier. Ces deux trièdres sont donc conjugués entre eux par cette loi, que le déplacement de la première arête de l'un égale le déplacement de la troisième arête de l'autre, et que les déplacements de leurs deuxièmes arêtes sont les mêmes.

10. *De la courbure inclinée.* — Considérons toujours la droite assujettie à s'appuyer sur la courbe et se mouvant d'après une loi donnée. L'angle que forment entre elles les deux positions infiniment voisines de cette droite sera appelé *angle de contingence inclinée;* soit δ cet angle; prenons les deux positions infiniment voisines de la droite, correspondantes aux deux extrémités A, A' de l'élément *ds* de la courbe; si du point A comme centre, avec un rayon infiniment petit, on décrit un arc de cercle entre la première position de la droite et

la parallèle à la position infiniment voisine de la droite, le rapport de l'angle de ces deux droites à l'élément ds sera appelé *courbure inclinée de la courbe* au point A; l'inverse de ce rapport sera *le rayon de courbure inclinée;* la direction de l'arc de cercle compris entre les deux droites est la direction du rayon de courbure inclinée; le centre de courbure inclinée s'obtient en mesurant dans cette direction, à partir du point A, une longueur égale au rayon de courbure inclinée; enfin le plan mené par le point A parallèlement aux deux positions infiniment voisines de la droite, ou, ce qui est la même chose, le plan de l'angle $\mathfrak{J}$ est le plan de courbure inclinée.

Expression de la courbure inclinée. — Représentons par $\mathfrak{L}$ le rayon de courbure inclinée au point A de la courbe, par λ, μ, ν les angles formés par ce rayon avec les trois axes coordonnés, et soit ds la longueur du rayon de l'arc de cercle décrit du point A comme centre; les trois côtés du triangle infinitésimal isocèle qu'on vient de former font, avec l'axe des x, des angles dont les cosinus sont : $\cos\lambda$, $-\cos\lambda - d\cos\lambda$, $\cos(\mathfrak{L}, x)$; or si l'on projette le périmètre de ce triangle sur l'axe des x, la somme des projections devant être nulle, on obtient

$$(5) \qquad \frac{\cos(\mathfrak{L}, x)}{\mathfrak{L}} = \frac{d\cos\lambda}{ds},$$

qui sert de type aux trois équations fournies chacune par l'un des axes coordonnés. En élevant au carré ces équations et formant la somme $\sum$, l'on obtient

$$(5') \qquad \frac{1}{\mathfrak{L}^2} = \sum\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2.$$

Ces équations donnent la grandeur et la direction du rayon de courbure inclinée.

11. *Plan de courbure inclinée.* — Pour déterminer ce plan, il suffit de connaître les angles que la normale n à ce plan fait avec les trois axes coordonnés. Or, si l'on considère l'aire du triangle infinitésimal précédemment défini, elle a pour expression $\frac{1}{2}ds^2\mathfrak{J}$. Or les projections des deux côtés de ce triangle

sur les trois axes sont connues; elles sont pour l'axe des x, $ds\cos\lambda$, $ds(\cos\lambda + d\cos\lambda), \ldots$; si l'on applique à ce triangle les formules du n° 6, dans le cas où les axes deviennent rectangulaires, on obtient trois formules qui sont contenues dans le type suivant :

$$(6) \qquad \delta\cos(n, z) = \cos\lambda\, d\cos\mu - \cos\mu\, d\cos\lambda,$$

lesquelles étant élevées au carré et ajoutées membre à membre donnent

$$(6') \qquad \delta^2 = \sum(\cos\lambda\, d\cos\mu - \cos\mu\, d\cos\lambda)^2.$$

Ces équations font connaître les angles que le plan de courbure inclinée fait avec les trois plans coordonnés, et donnent une nouvelle expression de l'angle de contingence oblique et par suite de la courbure inclinée.

12. *Angle de flexion inclinée.* — L'angle de deux plans de courbure inclinée, infiniment voisins, sera appelé *angle de flexion inclinée*. Par le point A, menons une perpendiculaire au plan de courbure inclinée et une parallèle à la perpendiculaire au plan de courbure inclinée infiniment voisin. Si du point A comme centre, avec un rayon égal à ds, on décrit un arc de cercle entre ces deux lignes, on aura un triangle tel, que l'angle en A sera l'angle de flexion inclinée G; le rapport de cet angle à l'élément ds sera *la seconde courbure inclinée ;* l'inverse de ce rapport, *le rayon de seconde courbure inclinée* Q; la direction de l'arc de cercle compris entre les deux côtés de l'angle G sera la direction du rayon de seconde courbure inclinée; le plan de cet angle sera le plan de seconde coubure inclinée. D'après cela, en raisonnant comme au n° 10 et en représentant par X, Y, Z les seconds membres des équations contenues dans le type (5), suivant que ces équations se rapportent aux axes des x, y, z, on aura les deux formules

$$(7) \qquad \frac{\cos(Q, x)}{Q} = \frac{d}{ds}(X\mathfrak{L}), \quad \frac{1}{Q^2} = \sum\left[\frac{d}{ds}(X\mathfrak{L})\right]^2.$$

La première est un type qui renferme trois équations rela-

tives, chacune à l'un des trois axes coordonnés; le signe $\sum$ de la seconde se rapporte aux seconds membres des trois équations précédentes.

De même, en opérant comme on a fait au n° 11 et en appelant N la normale au plan de seconde courbure inclinée, on obtiendra

$$(8)\qquad G\cos(N, z) = \mathfrak{X}\mathfrak{L}\frac{d}{ds}(\mathfrak{Y}\mathfrak{L}) - \mathfrak{Y}\mathfrak{L}\frac{d}{ds}(\mathfrak{X}\mathfrak{L}),$$

laquelle est un type contenant les trois équations qui se rapportent aux axes des x, y, z. Si l'on élève au carré ces trois équations et qu'on fasse la somme $\sum$ des seconds membres, l'on aura

$$(8')\qquad G^2 = \sum\left[\mathfrak{X}\mathfrak{L}\frac{d}{ds}(\mathfrak{Y}\mathfrak{L}) - \mathfrak{Y}\mathfrak{L}\frac{d}{ds}(\mathfrak{X}\mathfrak{L})\right]^2.$$

Remarquons que la perpendiculaire N au plan de seconde courbure inclinée est parallèle à l'intersection de deux plans de courbure inclinée infiniment voisins, et par conséquent à la direction de la droite mobile; de là résulte que $\cos(N, z)$ égale $\cos\nu$. On a donc, en développant le second membre de l'avant-dernière formule,

$$G\cos\nu = \mathfrak{L}^2(\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}\,d\mathfrak{X});$$

si l'on remplace $d\mathfrak{X}$ et $d\mathfrak{Y}$ par leur valeurs, on obtient

$$(9)\qquad G = -\mathfrak{L}^2\left(\mathfrak{X}\frac{d^2\cos\lambda}{ds} + \mathfrak{Y}\frac{d^2\cos\mu}{ds} + \mathfrak{Z}\frac{d^2\cos\nu}{dz}\right),$$

qui est une nouvelle expression de la seconde courbure inclinée.

13. *Courbure propre de la courbe.* — Généralement la droite mobile décrira une surface réglée gauche; cette surface serait développable si deux positions successives quelconques se rencontraient. Examinons le cas particulier où la droite mobile serait la tangente à la courbe. L'angle de deux positions infiniment voisines de la tangente donne l'*angle de contingence propre* de la courbe; le rapport de cet angle à l'élé-

ment ds est *la courbure propre de la courbe;* l'inverse de ce rapport est *le rayon de courbure;* l'arc de cercle infiniment petit compris entre les deux côtés de l'angle donne la *direction* de ce rayon, et, si à partir du point A l'on prend dans cette direction une longueur égale au rayon de courbure, l'extrémité sera le centre de courbure. Si dans les formules du n° 10 on remplace les cosinus des angles λ, μ, ν par les rapports des différentielles dx, dy, dz à l'élément ds, les expressions qui en résulteront feront connaître le rayon de courbure propre et sa direction.

14. *Plan osculateur.* — On appelle ainsi le plan qui passe par trois points de la courbe infiniment voisins. Ce plan est le même que le plan de deux tangentes infiniment voisines; il ne diffère donc pas du plan de courbure propre. L'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins est l'angle de flexion propre de la courbe; le rapport de cet angle à l'élément ds est la seconde courbure propre de la courbe. On obtiendra le plan osculateur, et tous les éléments relatifs à la seconde courbure, en remplaçant, dans les formules du n° 11 et du n° 12, les cosinus des angles λ, μ, ν par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

15. *Cercle osculateur.* — C'est le cercle qui passe par trois points de la courbe infiniment voisins. Soient trois points consécutifs A, A′, A″ de la courbe; par ces trois points faisons passer un cercle; soit R′ son rayon, menons le diamètre A′D, et joignons DA, DA″; soit $\Delta\theta$ le supplément de l'angle AA′A″; cet angle est égal à ADA″, donc l'arc AA′A″ est égal à $2R'\Delta\theta$; or, lorsqu'on passe à la limite, l'arc AA′A″ devient $2ds$, R′ devient le rayon R du cercle osculateur et l'angle $\Delta\theta$ devient $d\theta$ angle de contingence. Mais, d'après ce qui précède, le rayon de courbure coïncide en direction avec la normale située dans le plan de courbure; à la limite, le diamètre A′D coïncide avec cette normale; d'ailleurs le rayon R du cercle osculateur a pour expression le rapport de ds à $d\theta$ d'après ce qui vient d'être dit; donc le rayon du cercle osculateur coïncide en grandeur et en direction avec le rayon de courbure.

16. *Mouvement du plan normal.* — A chaque position de la tangente correspond une position du plan normal; le lieu

de ces positions est une surface développable dont la génératrice rectiligne est l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins. Cette intersection est perpendiculaire au plan osculateur. En effet, ce plan passe par deux tangentes infiniment voisines, donc il est perpendiculaire aux deux plans normaux correspondants, et, par suite, à leur intersection, laquelle, d'après le numéro précédent, rencontre le plan osculateur au centre de courbure de la courbe. Le lieu des intersections successives des génératrices est appelé *arête de rebroussement*. Cette courbe jouit de cette propriété, que son angle de contingence et son angle de flexion sont égaux, le premier, à l'angle de flexion, et le second, à l'angle de contingence de la courbe proposée. En effet, deux tangentes successives de cette dernière courbe font le même angle que les plans normaux correspondants, qui sont les plans osculateurs de l'arête de rebroussement; et deux tangentes successives de l'arête étant deux génératrices rectilignes de la surface développable, sont, d'après ce qui précède, perpendiculaires aux plans osculateurs correspondants de la courbe proposée; donc elles forment entre elles le même angle que ces plans. Ce théorème est dû à Fourier.

Extension de la méthode précédente. — Pour obtenir une connaissance plus approfondie de la nature de la courbe, il faudra :

1° Examiner le mouvement de la normale située dans le plan osculateur qu'on appelle *normale principale*, parce qu'elle coïncide en direction avec le rayon de courbure. Pour cela, il suffira de faire coïncider la droite mobile que l'on a considérée d'une manière générale avec la normale principale. Cette normale engendrera une surface réglée gauche, le plan perpendiculaire à la normale principale, appelé *plan rectifiant*, engendrera une surface développable, *surface rectifiante*.

2° Examiner le mouvement de la droite perpendiculaire au plan osculateur, menée par un point de la courbe : cette droite est appelée *binormale* de la courbe; elle engendrera une surface réglée gauche, tandis que le plan perpendiculaire à cette droite enveloppera une surface développable dont la courbe sera l'arête de rebroussement.

Il est facile de reconnaître que les formules générales exposées dans les nos 10, 11, 12 appliquées à ces deux cas particuliers feront connaître le mouvement de ces deux droites, et donneront les éléments des surfaces qui en résultent, ainsi que les relations intéressantes qui existent entre ces éléments.

17. *Des composantes de la courbure inclinée.* — Soit une direction D donnée par les angles α', β', γ' qu'elle fait avec les trois axes x, y, z, proposons-nous de chercher les composantes, d'après la règle du parallélogramme des forces, de la courbure inclinée $\frac{1}{\mathfrak{L}}$, suivant cette direction, et suivant la direction perpendiculaire, située dans le plan de D et de $\mathfrak{L}$. Si l'on remarque que les trois droites D, $\mathfrak{L}$, et la direction D′ perpendiculaire à D, située dans le plan des droites $\mathfrak{L}$, D, issues du point A pris sur la courbe, forment avec un des trois axes, Oy par exemple, deux trièdres : le premier, dont les arêtes sont Oy, OD, $\mathfrak{L}$, donne

$$\cos(\mathfrak{L}, y) = \cos(\mathfrak{L}, \mathrm{D})\cos(\mathrm{D}, y) + \sin(\mathfrak{L}, \mathrm{D})\sin(\mathrm{D}, y)\cos \mathrm{OD};$$

le second, dont les arêtes sont Oy, OD′, OD, donne

$$\cos(\mathrm{D}', y) = \sin(\mathrm{D}, y)\cos \mathrm{OD}.$$

De là résulte que l'on a

$$\cos(\mathfrak{L}, y) = \cos(\mathfrak{L}, \mathrm{D})\cos\beta' + \sin(\mathfrak{L}, \mathrm{D})\cos(\mathrm{D}', y).$$

D'après cela, l'on aura pour les composantes de $\frac{1}{\mathfrak{L}}$ suivant D et D′,

$$(10) \quad \frac{\cos(\mathfrak{L}, \mathrm{D})}{\mathfrak{L}} = \sum \cos\alpha' \frac{d}{ds}\cos\lambda,$$

$$(11) \quad \frac{\cos(\mathfrak{L}, \mathrm{D}')}{\mathfrak{L}} = \sum \left[\frac{\frac{d}{ds}\cos\lambda}{\sin(\mathfrak{L}, \mathrm{D})} - \cot(\mathfrak{L}, \mathrm{D})\cos\alpha' \right] \frac{d}{ds}\cos\lambda,$$

dans lesquelles le signe $\sum$ s'étend aux trois axes.

18. *Des composantes normale et tangentielle de la cour-*

bure inclinée. — Soit une surface sur laquelle la courbe est située, il est utile de connaître la composante de la courbure inclinée, suivant la normale et suivant le plan tangent. Représentons l'équation de cette surface rapportée à des coordonnées rectangles par

$$F(x, y, z) = c,$$

dans laquelle c est une constante; si l'on prend sur la surface un point infiniment voisin de celui que l'on considère, l'équation de la surface sera satisfaite par les coordonnées du premier point x, y, z, et par les coordonnées du second $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. On aura donc

$$(12) \qquad \sum \frac{dF}{dx} dx = 0.$$

Or, si l'on définit avec Gauss le plan tangent à la surface en un point, le plan dont s'éloignent infiniment peu les points de la surface infiniment voisins de celui que l'on considère, de sorte que la distance d'un de ces points au plan est infiniment petit d'un ordre supérieur au premier, il résulte de cette définition que la droite perpendiculaire au plan au point que l'on considère est normale à tout déplacement ds infiniment petit effectué sur la surface à partir de ce point; donc, n étant la direction de la normale, on aura

$$(13) \qquad \sum dx \cos(n, dx) = 0.$$

Cette équation et la précédente devant avoir lieu quelle que soit la direction de ds, et, conséquemment, de ses projections dx, dy, dz, il en résulte que les cosinus des angles de la normale avec les axes des x, y, z doivent être proportionnels aux dérivées de F par rapport à x, y, z; donc si l'on pose, pour abréger,

$$h^2 = \sum \left(\frac{dF}{dx}\right)^2,$$

l'on a

$$(14) \qquad \cos(n, dx) = \frac{1}{h} \frac{dF}{dx} \quad [3].$$

Ces cosinus ont double signe, parce que à partir du point

pris sur la surface, on peut se déplacer normalement à cette surface dans deux directions opposées qui caractérisent la normale extérieure et la normale intérieure. Lorsque les coordonnées de l'extrémité du déplacement portées dans l'équation $F(x, y, z) - c = 0$, donnent un résultat positif, le déplacement a lieu suivant la normale extérieure. C'est l'inverse lorsque le résultat est négatif. On choisit pour sens positif de la normale, celui de la normale extérieure.

Dans ce numéro comme dans les précédents, le signe $\sum$ s'étend aux valeurs que prend la quantité placée sous ce signe pour les différents axes coordonnés. Nous adopterons cette notation dans la suite de nos recherches. La dernière équation est un type qui renferme les équations qui en résultent, quand on fait subir aux variables x, y, z les permutations rotatoires, et nous placerons un chiffre à droite entre crochets [ ] pour indiquer le nombre des équations résultant de ces permutations.

Si maintenant on remplace dans les deux dernières équations du numéro précédent, les cosinus de α', β', γ' par les valeurs de cosinus des angles (n, dx), (n, dy), (n, dz) que nous venons de trouver, on aura les composantes normale et tangentielle de la courbure inclinée $\frac{1}{\mathfrak{L}}$.

19. *Relations générales entre les angles des arêtes ot, on, or de la figure sphérique et une direction fixe.* — Nous serons quelquefois obligé de considérer plusieurs séries de droites se déduisant, dans chaque série, d'une droite principale, de la même manière que, dans la figure sphérique du n° 9, les rayons *on*, *or*, *ol*, *op*,... se déduisent du rayon *ot*; il convient donc d'exprimer généralement les angles que les droites d'une série quelconque font avec une direction fixe. En raisonnant comme on l'a fait aux nos 10 et 11, on a

$$(15)\quad \begin{cases} tt'\cos(r, x) = d\cos(t, x), \\ tt'\cos(n, x) = \cos(t, z)\,d\cos(t, y) - \cos(t, y)\,d\cos(t, z), \\ nn'\cos(r, x) = d\cos(n, x). \end{cases}$$

Représentons, pour abréger, les angles (t, t'), (r, r'), (n, n')

par $d\varepsilon$, $d\varkappa$, $d\omega$; l'angle que op fait avec ot par θ, et par conséquent l'angle (p, p') par $d\theta$ (4), enfin l'angle (l, l') par $d\psi$: il résulte des formules précédentes que l'on peut exprimer les cosinus des angles que la droite ot fait avec une direction et les dérivées successives des mêmes cosinus, en fonction des rapports de $d\varepsilon$ et $d\omega$ à ds et des angles que les trois arêtes on, ot, or du trièdre trirectangle font avec la même direction.

En effet, l'on a

$$\cos^2(t, x) + \cos^2(n, x) + \cos^2(r, x) = 1.$$

Si l'on différentie cette équation et qu'on ait égard aux équations précédentes, on trouve

$$(16)\qquad \frac{d\cos(r, x)}{ds} = -\frac{d\varepsilon}{ds}\cos(t, x) - \frac{d\omega}{ds}\cos(n, x).$$

Cela posé, si l'on différentie la première des équations (15), on trouve, en ayant égard à la précédente,

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{d\cos(t, x)}{ds}\right] = -\dfrac{d\varepsilon}{ds}\left[\dfrac{d\varepsilon}{ds}\cos(t, x) + \dfrac{d\omega}{ds}\cos(n, x)\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{d\varepsilon}{ds}\right)\cos(r, x). \end{cases}$$

Or, en différentiant cette dernière, on introduira les dérivées des cosinus des angles (t, x), (n, x), (r, x), lesquelles, d'après les équations précédentes, sont connues en fonction des cosinus des mêmes angles et des rapports $\frac{d\varepsilon}{ds}$, $\frac{d\omega}{ds}$. Donc la dérivée troisième de $\cos(t, x)$ sera exprimée en fonction des mêmes rapports et des mêmes cosinus.

La même propriété existera pour les dérivées des cosinus des angles que on et or font avec trois directions déterminées.

CHAPITRE II.

DES COORDONNÉES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

20. *Coordonnées d'un point.* — Soit une surface rapportée à trois axes rectangulaires x, y, z, et dont l'équation est $F = 0$. Si l'on joint à cette équation l'équation d'une seconde surface $f(x, y, z) = \rho$, ρ étant un paramètre variable, leur ensemble représente une courbe tracée sur la surface F; si l'on donne au paramètre ρ toutes les valeurs possibles, l'on aura une série de courbes situées sur la surface. Nous représentons par (ρ) cette série de courbes. Si l'on se donne une seconde série (ρ_1) de courbes, provenant de l'ensemble des intersections de F avec une surface $f_1(x, y, z) = \rho_1$, quand on donne à ρ_1 toutes les valeurs possibles, un point quelconque de la surface F sera déterminé par l'intersection de deux courbes que l'on obtient en donnant aux paramètres ρ, ρ_1 des valeurs convenables.

Les deux familles de courbes (ρ), (ρ_1) forment un système de courbes dites *coordonnées*. Généralement l'angle que forment entre elles deux courbes de ces deux familles en se coupant n'est ni droit, ni constant : il varie avec la position du point, c'est-à-dire avec les valeurs de ρ, ρ_1.

Problème des coordonnées curvilignes. — Soit un point mobile, assujetti à parcourir une courbe quelconque située sur la surface F; si l'on étudie les diverses positions de ce point au moyen d'un système quelconque de coordonnées tracées sur la surface, les déplacements de ce point ont des liaisons nécessaires avec les déplacements correspondants des coordonnées de ce point : il en résulte des relations entre les tangentes, les courbures de la courbe, et les tangentes et courbures des lignes coordonnées. Ces relations, au point de vue géométrique, sont des théorèmes remarquables entre les divers éléments de la trajectoire décrite et les éléments des

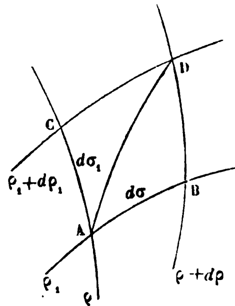
courbes coordonnées; au point de vue analytique, elles fournissent un moyen facile de passer d'un système de coordonnées à un autre, et aussi de résoudre la question qu'on se propose dans le système le mieux adapté à cette question.

21. *Tangentes aux lignes coordonnées, paramètres différentiels.* — Les équations des deux lignes coordonnées sont

$$(1) \quad [F = 0,\ f(x, y, z) = \rho], \quad [F = 0,\ f_1(x, y, z) = \rho_1].$$

Si, des équations F, f, f_1, on tire les expressions de x, y, z en fonction de ρ et de ρ_1, et que, dans ces expressions, on suppose que, ρ_1 restant constant, ρ prenne toutes les valeurs possibles, l'on aura les coordonnées rectangles rectilignes de la courbe d'intersection de ρ_1 avec F. Soit σ l'arc de cette courbe; les coordonnées (*fig.* 2) du point B infiniment voisin du

Fig. 2.



point A s'obtiendront en donnant, dans ces expressions, à ρ l'accroissement $d\rho$; l'élément $d\sigma$ sera donc donné par la formule

$$d\sigma^2 = \left(\frac{dx^2}{d\rho^2} + \frac{dy^2}{d\rho^2} + \frac{dz^2}{d\rho^2}\right) d\rho^2,$$

et les angles que cet élément fait avec les trois axes des x, y, z seront

$$\cos(x, d\sigma) = \frac{d_\rho x}{d\sigma}, \quad \cos(y, d\sigma) = \frac{d_\rho y}{d\sigma}, \quad \cos(z, d\sigma) = \frac{d_\rho z}{d\sigma}.$$

Pour abréger, nous poserons la somme des carrés des déri-

vées de x, y, z par rapport à ρ égale au carré de H, que nous appellerons, suivant l'usage, *paramètre différentiel du premier ordre* de la courbe σ. Nous représenterons quelquefois les variations par rapport à ρ, ρ_1 par les symboles d_0, d_1, ou bien par d_ρ, d_{ρ_1}, à moins que le sens des variations ne soit déterminé par le dénominateur. La lettre d indiquera la variation complète par rapport à ρ et à ρ_1.

Si l'on appelle σ_1 l'arc d'intersection des deux surfaces F et ρ, on trouvera pour cette intersection des quantités analogues aux précédentes. Nous les représenterons par les mêmes lettres affectées de l'indice 1; d'après cela on aura

$$(2)\qquad d\sigma = \mathrm{H}\,d\rho,\quad d\sigma_1 = \mathrm{H}_1\,d\rho_1.$$

Angle des lignes coordonnées. — Soit φ cet angle, on a indistinctement

$$(3)\qquad \cos\varphi = \sum \frac{dx}{d\sigma}\frac{dx}{d\sigma_1},\quad \mathrm{HH}_1\cos\varphi = \sum \frac{d_0 x}{d\rho}\frac{d_1 x}{d\rho_1}.$$

22. *De la courbure propre et de la courbure inclinée des lignes coordonnées.* — Soit un point A de la courbe σ, nous représentons par $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ la courbure propre de cette courbe en ce point. Si l'on considère la suite des tangentes aux lignes coordonnées de l'autre série au point où elles coupent la courbe σ, nous représentons par $\frac{1}{\mathfrak{L}}$ la courbure inclinée de la ligne σ suivant la direction de ces tangentes, par $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{z}$ les angles de contingence propre et de contingence inclinée de la même courbe.

Nous avertissons, *une fois pour toutes*, que si une lettre représente un élément appartenant à la courbe σ, la même lettre affectée de l'indice 1 représente le même élément appartenant à la courbe σ_1. Lorsqu'une relation existera pour une ligne coordonnée, il existera une équation semblable pour l'autre ligne coordonnée; cette équation se déduira de la première par la permutation des paramètres ρ, ρ_1. Nous n'écrirons qu'une seule équation; mais nous écrirons à droite de cette équation, considérée comme type, un chiffre entre parenthèses ( ) indiquant le nombre d'équations contenues dans le

type. Si l'on rapproche cette notation de celle qui a été annoncée au n° 18, relative au nombre d'équations contenues dans un type, lesquelles proviennent de la permutation des variables x, y, z, on aura le sens des signes ( ), [ ] placés à droite d'une équation.

Cela posé, on a, d'après ce qui a été établi au n° 10,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos(\mathfrak{R}, x)}{\mathfrak{R}} &= \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) \quad [3] \quad (2), \\ \frac{\cos(\mathfrak{L}, x)}{\mathfrak{L}} &= \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\right) \quad [3] \quad (2), \end{aligned} \right.$$

lesquelles font connaître la grandeur et la direction des rayons de courbure propre ou inclinée des lignes coordonnées.

23. *Des composantes obliques de la courbure d'une ligne coordonnée.* — Considérons les deux séries de surfaces $f(x, y, z) = \rho$, $f_1(x, y, z) = \rho_1$ coupant la surface F suivant le réseau des lignes coordonnées. Soient AB, BC deux éléments successifs d'une courbe coordonnée σ_1; par le premier élément faisons passer deux plans tangents T, T″ aux surfaces f, F, et par le second élément deux plans tangents S, S″ aux mêmes surfaces. Ces quatre plans tangents (*fig.* 3) forment un angle

Fig. 3.

solide quadrangulaire dont le sommet est en B, dont les arêtes opposées sont, d'une part, le prolongement de AB et l'élément BC, et, d'une autre part, BD_2 intersection des plans T, S″, et BD intersection des plans T″, S. L'angle CBE est l'angle de contingence $\mathfrak{T}_1$. Si l'on appelle i''_1, i_1 les angles que l'élément AB prolongé fait avec les intersections BD, BD_2, on aura la proposition suivante :

Théorème. — *Les angles i''_1, i_1 se composent avec l'angle de contingence $\mathfrak{T}_1$ de la courbe $d\sigma_1$ d'après la règle du parallélogramme des forces.*

En effet, si l'on considère le trièdre dont les arêtes sont BE, BC, BD, on a, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, et en représentant par n, n_1, n_2 les normales aux surfaces f, f_1, F, les relations suivantes :

$$\frac{i''_1}{\cos(n, \mathfrak{R}_1)} = \frac{i_1}{\cos(n_2, \mathfrak{R}_1)} = \frac{\mathfrak{J}_1}{\sin\varphi},$$

$$\mathfrak{J}_1^2 = i''^2_1 + i_1^2 + 2 i_1 i''_1 \cos\varphi.$$

Il est facile de voir que l'angle i_1 est l'angle de contingence de la courbe que le plan tangent à la surface ρ intercepte sur la surface F, et que i''_1 est l'angle de contingence de la courbe que le plan tangent à la surface F intercepte sur ρ.

Corollaire. — Si les surfaces ρ, F se coupent orthogonalement, l'angle i_1 est l'angle de contingence de la section normale à la surface F faite suivant l'élément $d\sigma_1$, ou bien encore l'angle de contingence de la projection de la courbe σ_1 sur le plan tangent à la surface ρ, c'est-à-dire l'angle que M. Liouville appelle *angle de contingence géodésique* de la courbe σ_1 par rapport à la surface ρ. Pour éviter une confusion qui ne manquerait pas de se produire dans nos recherches, nous l'appellerons *angle de contingence tangentielle* de la courbe σ_1 par rapport à la surface ρ. L'angle i''_1 donne naissance à des observations analogues par rapport aux surfaces ρ et F. On déduit de là :

1° Si une courbe est située sur une surface, la projection de l'angle de contingence de cette courbe sur le plan normal à la surface mené par l'élément de la courbe est l'angle de contingence de la section normale faite sur la surface suivant cet élément : c'est la composante normale de l'angle de contingence de la courbe en question, ou simplement l'angle de contingence normale.

2° Si une courbe est située sur une surface, la projection de l'angle de contingence de cette courbe sur le plan tangent à la surface mené par l'élément de la courbe est l'angle de contingence de la projection de la courbe sur le plan tangent : c'est la composante tangentielle de l'angle de contingence de la courbe proposée par rapport à la surface.

3° Si le plan osculateur de la courbe est normal à la surface,

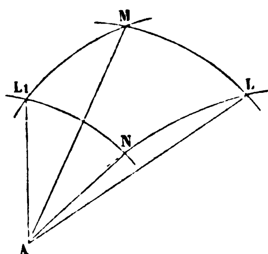
la composante tangentielle de l'angle de contingence est nulle. La courbe jouissant de cette propriété qu'en un point quelconque son plan osculateur est normal à la surface sur laquelle cette courbe est située est dite *ligne géodésique de la surface;* elle est donc caractérisée par cette condition qu'en tous ses points la composante tangentielle de son angle de contingence est nulle.

4° Si l'on divise les équations précédentes, les premières par $d\sigma_1$ et la seconde par $d\sigma_1^2$, on voit que les théorèmes que nous venons de démontrer existent pour les courbures.

Remarque. — Les composantes, normale ou tangentielle, de la courbure d'une ligne située sur une surface n'ont pas seulement un sens analytique, mais elles ont une réalité géométrique, ce qui permet de saisir la signification des relations relatives à ces composantes.

24. *Des composantes obliques de la courbure inclinée d'une ligne coordonnée.* — Par l'une des extrémités de l'arc $d\sigma_1$ menons une tangente à l'arc $d\sigma$ et une parallèle à l'arc élémentaire de la série (σ) qui passe par l'autre extrémité. Ces deux droites AM, AN (*fig.* 3') déterminent l'angle de contin-

Fig. 3'.



gence inclinée $\mathfrak{I}_1$ de l'arc $d\sigma_1$ suivant $d\sigma$. Or, si par la première on mène deux plans P'', P' tangents aux surfaces F et ρ_1, et que par la seconde on mène deux plans Q'' et Q' tangents aux mêmes surfaces, ces quatre plans forment un angle solide quadrangulaire dont le sommet est en A et dont les arêtes opposées sont, d'une part, AM, AN, et, d'une autre part, AL intersection du plan P'' et du plan Q', et AL_1 intersection

des plans Q″ et P″. Si l'on appelle j''_1 l'angle que l'élément AM fait avec AL, et j'_1 l'angle que l'élément AM fait avec AL_1, on a, comme précédemment,

$$\frac{j''_1}{\cos(n_1, \mathfrak{L}_1)} = \frac{j'_1}{\cos(n_2, \mathfrak{L}_1)} = \frac{\mathfrak{z}_1}{\sin\varphi},$$

$$\mathfrak{z}_1^2 = j''^2_1 + j'^2_1 + 2j''_1 j'_1 \cos\varphi.$$

THÉORÈMES. — *Les angles j''_1, j'_1 se composent avec l'angle $\mathfrak{z}_1$ de contingence oblique de la courbe σ_1 d'après la règle du parallélogramme des forces.*

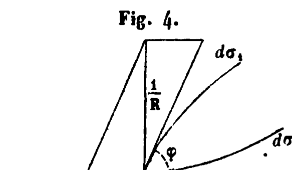
Si les deux surfaces F *et* ρ_1 *sont orthogonales, l'angle j''_1 devient la projection orthogonale de l'angle $\mathfrak{z}_1$ sur le plan tangent à la surface* F, *c'est-à-dire la composante tangentielle de l'angle de contingence inclinée de la courbe $d\sigma_1$ par rapport à la surface* F, *et l'angle j'_1 devient la projection orthogonale de l'angle $\mathfrak{z}_1$ sur le plan normal à la surface* F, *c'est-à-dire la composante normale de l'angle de contingence inclinée de la courbe $d\sigma_1$.*

Ces théorèmes existent évidemment quand on passe des angles de contingence inclinée aux courbures correspondantes. Ils donnent la signification géométrique des courbures inclinées, de leurs composantes orthogonales, de leurs composantes obliques suivant les plans tangents aux surfaces qui déterminent par leurs intersections la direction de l'élément par rapport auquel est prise la courbure inclinée de la ligne coordonnée.

25. *Composantes des courbures suivant les lignes coordonnées.* — Nous représenterons par $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{r}$; $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$ les composantes tangentielle et normale des courbures $\frac{1}{\mathfrak{R}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}}$, propre ou inclinée, de la courbe $d\sigma$; les composantes de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ (*fig.* 4) suivant $d\sigma$ et $d\sigma_1$, d'après la règle du parallélogramme des forces, sont : $-\frac{\cot\varphi}{R}$, $\frac{1}{R\sin\varphi}$; les composantes de la courbure inclinée $\frac{1}{\mathfrak{L}_1}$ suivant les mêmes directions sont : $-\frac{\cot\varphi}{L_1}$, $\frac{1}{L_1\sin\varphi}$.

Nous représenterons par I, i les projections de l'angle de contingence $\mathfrak{J}$ sur le plan tangent et sur le plan normal à

Fig. 4.



la surface F; par J_1, j_1 les projections de l'angle de contingence inclinée $\mathfrak{J}_1$ sur le plan tangent et sur le plan normal. D'après cela, $-I\cot\varphi$, $\frac{I}{\sin\varphi}$, $-J_1\cot\varphi$, $\frac{J_1}{\sin\varphi}$ seront les angles de contingence correspondant aux composantes des courbures $\frac{1}{\mathfrak{R}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}}$ suivant $d\sigma$, $d\sigma_1$.

26. *Variation de l'angle des lignes coordonnées.* — On a

$$\cos\varphi = \sum \frac{dx}{d\sigma}\frac{dx}{d\sigma_1};$$

si l'on prend la variation par rapport à ρ, on aura

$$-\sin\varphi\frac{d\varphi}{d\rho} = \sum\left[\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)\frac{dx}{d\sigma_1} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\right)\frac{dx}{d\sigma}\right]\frac{d\sigma}{d\rho}.$$

Or, si l'on a égard aux relations du n° 21, on pourra écrire

$$-\sin\varphi\frac{d\varphi}{d\rho} = \sum\left[\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{\cos(\mathfrak{R}, x)}{\mathfrak{R}} + \frac{dx}{d\sigma}\frac{\cos(\mathfrak{L}, x)}{\mathfrak{L}}\right]\frac{d\sigma}{d\rho}.$$

Si l'on remarque que la somme des termes qui renferment la courbure $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ comme facteur exprime la composante de la courbure suivant l'arc $d\sigma_1$, et que la somme des termes qui renferment la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}}$ comme facteur exprime la composante de cette courbure suivant l'arc $d\sigma$, on a

$$(5) \qquad -d_\rho\varphi = \frac{d\sigma}{R} + \frac{d\sigma}{L} = I + J \quad (2).$$

On déduit des deux équations renfermées dans le type précédent la relation suivante :

$$(6)\qquad -d_0 d_1 \varphi = d_1 I + d_1 J = d_0 I_1 + d_0 J_1.$$

Ces deux dernières équations donnent naissance aux deux théorèmes suivants :

I. *La variation de l'angle des lignes coordonnées par rapport au paramètre d'une courbe est la somme des projections tangentielles de l'angle de contingence propre et de l'angle de contingence inclinée de l'autre courbe coordonnée.*

II. *La somme des variations des deux projections tangentielles des deux angles de contingence propre et de contingence inclinée d'une courbe par rapport à son paramètre est égale à la variation seconde de l'angle des lignes coordonnées par rapport aux deux paramètres de ces courbes.*

La formule (5) peut s'écrire sous la forme

$$-\frac{1}{L} = \frac{1}{R} + \frac{d_0 \varphi}{d\sigma} \quad (*).$$

Elle est remarquable en ce qu'elle donne la composante tangentielle de la courbure inclinée d'une ligne $d\sigma$ suivant l'autre ligne $d\sigma_1$ égale à la somme de la composante tangentielle de la courbure propre de la ligne $d\sigma$ et du rapport différentiel de l'angle des lignes coordonnées à l'arc de la courbe : or le premier élément est indépendant de tout système coordonné, et le second ne dépend que de la variation de l'angle. Nous verrons que la composante normale de cette courbure inclinée n'a pas une composition moins remarquable.

27. *Démonstration géométrique des formules précédentes.* — Si aux extrémités de l'arc $d\sigma$, l'on mène des tangentes aux

---

(*) Cette formule a été donnée par nous dans notre premier Mémoire sur les coordonnées curvilignes, présenté à l'Académie des Sciences de Paris, avril 1859 (*Comptes rendus*, t. XLVIII), et publié dans le *Journal de Crelle*, même année, t. LVIII, p. 365. Elle a été aussi donnée dans notre second Mémoire sur les coordonnées curvilignes quelconques, présenté à la même Académie en 1862 (*Comptes rendus*, t. L) et publié dans le *Journal de M. Tortolini*, t. VI, p. 75, formule (14).

courbes coordonnées, et qu'on projette la figure sur le plan tangent à la surface F en l'une des extrémités de cet axe, les projections des quatre tangentes formeront un quadrilatère; l'angle des projections des tangentes à la courbe $d\sigma$ est la projection tangentielle I de l'angle de contingence de la courbe $d\sigma$, et l'angle des deux autres tangentes est l'angle J, projection tangentielle de l'angle de contingence inclinée de la courbe $d\sigma$. Cela posé, les angles de ce quadrilatère sont : $(\pi - \varphi)$, $\pi + \mathrm{I}$, $\varphi + d_0\varphi$, J. La somme des angles de ce quadrilatère égalant quatre angles droits, l'on a

$$-d_\rho \varphi = \mathrm{I} + \mathrm{J} \quad (2).$$

D'une autre part, appelons τ la distance comptée sur la tangente à l'élément $d\sigma_1$ entre le point de contact et le point où elle est coupée par la projection de la tangente à la courbe infiniment voisine de la même série. Si, de ce point comme centre, avec un rayon égal à τ, on décrit entre deux droites un arc de cercle, cet arc de cercle sera $d\sigma \sin\varphi$; on aura donc

$$\tau \mathrm{J} = d\sigma_1 \sin\varphi;$$

par suite, la formule précédente devient

$$-\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\tau} \quad (2).$$

En comparant cette formule à celle du numéro précédent, on conclut que $\tau = \mathrm{L}$, ce qui donne le moyen de construire la composante tangentielle de la courbure inclinée.

28. *Relations entre les composantes des courbures des lignes coordonnées.* — Représentons par X, X_1, X_2 les cosinus des angles que les éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$ des courbes coordonnées et la direction de la normale à la surface F font avec l'axe des x, l'on a

$$d_0 x = \mathrm{X}\, d\sigma, \quad d_1 x = \mathrm{X}_1\, d\sigma_1;$$

or, si l'on différentie la première expression par rapport à ρ_1, l'on obtiendra

$$d_1 d_0 x = \mathrm{X}\, d_1 d\sigma + d\sigma\, d_1 \mathrm{X}.$$

Si l'on remarque que

$$d_1 X = \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) d\sigma_1 = \frac{\cos(\mathfrak{L}_1, x)}{\mathfrak{L}_1} \frac{d\sigma_1}{d\rho_1} d\rho_1,$$

et qu'on remplace la composante de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}_1}$ suivant l'axe des x par la somme des projections sur cet axe des composantes de cette courbure suivant $d\sigma$, $d\sigma_1$, et la normale à la surface F, n° 25, l'on aura

$$d_1 d_0 x = \left(d_1 d\sigma - d\sigma\, d\sigma_1 \frac{\cos\varphi}{L_1 \sin\varphi}\right) X + \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{L_1 \sin\varphi} X_1 + \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{l_1} X_2;$$

on trouvera de même

$$d_0 d_1 x = \left(d_0 d\sigma_1 - d\sigma\, d\sigma_1 \frac{\cos\varphi}{L \sin\varphi}\right) X_1 + \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{L \sin\varphi} X + \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{l} X_2.$$

Ces deux expressions devant être identiques quels que soient X, X_1, X_2, l'on trouve, par l'identification des deux derniers termes,

(7) $$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_1}.$$

THÉORÈME. — *Les composantes normales de deux courbures inclinées, conjuguées de deux lignes coordonnées quelconques sur une surface, sont égales entre elles.*

L'identification des deux premiers termes donne deux équations renfermées dans le type suivant :

(8) $$d_0 d\sigma_1 = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{\cos\varphi}{L}\right) \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin\varphi} \quad (2)\ (*).$$

Ces deux équations donnent les variations des arcs coordonnés suivant les paramètres réciproques en fonction des composantes tangentielles des courbures inclinées. On peut les écrire sous le type suivant :

(8') $$\sin\varphi\, d_\rho\, d\sigma_1 = J_1\, d\sigma + J \cos\varphi\, d\sigma_1 \quad (2).$$

(*) Les deux formules (7) et (8) et les théorèmes qui en résultent ont été donnés par nous dans notre *Théorie des Coordonnées curvilignes quelconques*, p. 15, formule (20), et p. 22, formule (32).

L'élimination de φ entre ces deux équations conduit à l'équation

$$(d_0 d\sigma_1)^2 - (d_1 d\sigma)^2 = J_1^2 d\sigma^2 - J^2 d\sigma_1^2,$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\left[\frac{d}{d\sigma}\left(\log\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\right)\right]^2 - \left[\frac{d}{d\sigma_1}\left(\log\frac{d\sigma}{d\rho}\right)\right]^2 = \frac{1}{L_1^2} - \frac{1}{L^2}.$$

29. *Variations des arcs coordonnés.* — Les formules précédentes donnent les variations des arcs coordonnés; occupons-nous de la discussion de ces formules et de leurs conséquences.

Si l'angle φ est constant, les formules du n° 27 prouvent que dans ce cas R et L sont égaux et de signes contraires; donc la formule du numéro précédent devient

$$(8'') \qquad -d_0 d\sigma_1 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\cos\varphi}{R}\right)\frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin\varphi} \quad (2).$$

Si l'angle φ est droit, l'on obtient l'équation de Gauss :

$$(8''') \qquad d_0 d\sigma_1 + \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{R_1} = 0 \quad (2).$$

Si la ligne coordonnée $d\sigma_1$ est géodésique, $\frac{1}{R_1}$ est nulle, et la formule précédente se réduit au seul terme

$$d_0 d\sigma_1 = 0,$$

ce qui signifie que la variation de l'arc $d\sigma_1$ étant nulle par rapport à ρ, l'élément $d\sigma_1$ sera le même pour toutes les valeurs de ρ. De là on déduit ce théorème de Gauss :

Les trajectoires orthogonales d'un système de lignes géodésiques interceptent sur ces lignes des longueurs constantes.

La réciproque de cette proposition est également vraie; car si les lignes d'un système, orthogonal d'un autre système, interceptent sur les courbes du second des longueurs constantes, les variations des arcs coordonnés de ce système sont nulles, et la seconde formule du présent numéro prouve

que dans ce cas $\frac{1}{R_1}$, courbure tangentielle des courbes du second système, est nulle; donc elles sont géodésiques.

Corollaire. — Si un fil appliqué sur la surface F se déroule en restant tangent à une courbe située sur la surface, un point du fil décrit une trajectoire orthogonale des positions successives du fil, qui sont des lignes géodésiques de la surface.

30. *Expression des courbures tangentielles en fonction des variations des arcs coordonnés.* — Les deux formules contenues dans le type (8) du n° 28 forment un système dans lequel les deux composantes $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L_1}$ des courbures inclinées sont les inconnues; la résolution de ces équations donne les valeurs de ces deux composantes :

$$(9) \qquad d\sigma_1 \frac{d\sigma}{L} \sin\varphi = d_1\, d\sigma - \cos\varphi\, d_0\, d\sigma_1 \quad (2).$$

Si dans ces formules, l'on remplace $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L_1}$ par leurs valeurs en fonction des courbures $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_1}$ données par les formules (5), l'on obtient

$$(10) \qquad -\, d\sigma_1 \frac{d\sigma}{R} \sin\varphi = d_1\, d\sigma - d_0(\cos\varphi\, d\sigma_1) \quad (2).$$

Si l'angle φ restant quelconque, σ est une ligne géodésique, la formule qui donne $\frac{1}{R}$ du type précédent devient

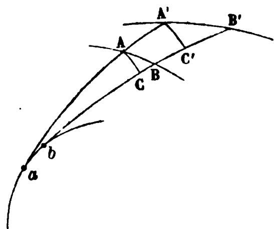
$$d_1\, d\sigma = d_0(\cos\varphi\, d\sigma_1).$$

Donc, si la série (ρ_1) est géodésique, les variations par rapport aux paramètres réciproques, de l'élement d'arc d'une ligne de la série et de la projection de l'élément d'arc de la ligne de l'autre série sur l'arc géodésique, sont égales.

Ainsi (*fig.* 5), dans le cas d'un fil qui se déroule sur une surface en restant tangent à une courbe située sur la surface, si aAA', bBB' sont deux positions successives du fil, quel que

soit le système des trajectoires AB, A′B′ des positions du fil, et que CB et C′B′ soient les projections des arcs AB, A′B′

Fig. 5.



sur la direction du fil, l'on aura la relation

$$C'B' - CB = BB' - AA'.$$

31. *Expression des composantes tangentielles des courbures propres ou inclinées en fonction des paramètres différentiels.* — L'on pose

$$(11)\quad d\sigma = H\,d\rho,\quad d\sigma_1 = H_1\,d\rho_1,\quad d\sigma\,d\sigma_1\cos\varphi = G^2\,d\rho\,d\rho_1,$$

dans lesquelles H, H_1 paramètres différentiels des arcs, et G paramètre différentiel de l'inclinaison relative des lignes coordonnées, sont des fonctions de ρ, ρ_1, on déduit les relations

$$\cos\varphi = \frac{G^2}{HH_1},\quad \sin^2\varphi = \frac{H^2H_1^2 - G^4}{H^2H_1^2},$$

$$d\sigma\,d\sigma_1\sin\varphi = \sqrt{H^2H_1^2 - G^4}\,d\rho\,d\rho_1,$$

d'après lesquelles les deux premiers types du numéro précédent deviennent

$$(10')\qquad \frac{\sqrt{H^2H_1^2 - G^4}}{R} = -\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{G^2}{H}\right)\quad (2),$$

$$(9')\qquad \frac{\sqrt{H^2H_1^2 - G^4}}{L} = \frac{dH}{d\rho_1} - \frac{G^2}{HH_1}\frac{dH_1}{d\rho}\quad (2);$$

on pourra donc, au moyen de ces formules, obtenir les composantes tangentielles des courbures propres ou inclinées des

deux courbes, lorsque les trois paramètres H, H_1 G seront connus en fonction de ρ et de ρ_1.

32. *Variation des projections tangentielles des angles de contingence propre ou inclinée.* — Si l'on compose en une seule les courbures $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L_1}$ qui sont connues en grandeur et en direction, d'après la règle du parallélogramme des forces, et qu'on appelle $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda_1}$ les composantes de la résultante suivant L et L_1, les formules du n° 28 prendront la forme binôme

$$(8'') \qquad \frac{d_0\, d\sigma_1}{d\sigma\, d\sigma_1} \sin\varphi = \frac{1}{\lambda_1} \quad (2).$$

Cela posé, l'on a

$$I = \frac{d\sigma}{R}, \quad I = \frac{d\sigma_1}{R_1};$$

si l'on différentie la première par rapport à ρ_1, et la seconde par rapport à ρ, en ayant égard à la formule précédente, l'on a

$$(12) \qquad d_{\rho_1} I = d\sigma\, d\sigma_1 \left[\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R\lambda \sin\varphi}\right] \quad (2).$$

De même, l'on a

$$J = \frac{d\sigma}{L}, \quad J_1 = \frac{d\sigma_1}{L_1},$$

et l'on obtient semblablement

$$(13) \qquad d_{\rho_1} J = d\sigma\, d\sigma_1 \left[\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{L}\right) + \frac{1}{L\lambda \sin\varphi}\right] \quad (2).$$

Si le système des coordonnées est orthogonal, λ, λ_1 ne diffèrent pas de L, L_1; les formules précédentes deviennent

$$d_{\rho_1} I = d\sigma\, d\sigma_1 \left[\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R^2}\right].$$

On déduit sans difficulté les deux expressions suivantes, qui

nous seront utiles :

$$[12]\begin{cases} d_1(\mathrm{I}\sin\varphi) = d\sigma\, d\sigma_1\left[\dfrac{d}{d\sigma_1}\left(\dfrac{\sin\varphi}{\mathrm{R}}\right) + \dfrac{1}{\mathrm{R}\lambda}\right] \\ \qquad = d\sigma\, d\sigma_1\left[\sin\varphi\dfrac{d}{d\sigma_1}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}}\right) + \dfrac{1}{\mathrm{L}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}} - \dfrac{\cos\varphi}{\mathrm{R}_1}\right)\right] \ (2), \end{cases}$$

$$[13]\begin{cases} d_1(\mathrm{J}\sin\varphi) = d\sigma\, d\sigma_1\left[\dfrac{d}{d\sigma_1}\left(\dfrac{\sin\varphi}{\mathrm{L}}\right) + \dfrac{1}{\mathrm{L}\lambda}\right] \\ \qquad = d\sigma\, d\sigma_1\left[\sin\varphi\dfrac{d}{d\sigma_1}\left(\dfrac{1}{\mathrm{L}}\right) + \dfrac{1}{\mathrm{L}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{L}} - \dfrac{\cos\varphi}{\mathrm{R}_1}\right)\right] \ (2), \end{cases}$$

ou, plus généralement, $\psi(\varphi)$ étant une fonction quelconque de l'angle φ,

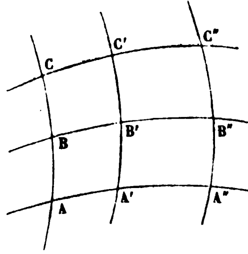
$$[12'] \quad d_1[\mathrm{I}\psi'(\varphi)] = d\sigma\, d\sigma_1\left\{\frac{d}{d\sigma_1}\left[\frac{\psi'(\varphi)}{\mathrm{R}}\right] + \frac{\psi'(\varphi)}{\mathrm{R}\lambda\sin\varphi}\right\} \quad (2),$$

$$[13'] \quad d_1[\mathrm{J}\psi'(\varphi)] = d\sigma\, d\sigma_1\left\{\frac{d}{d\sigma_1}\left[\frac{\psi'(\varphi)}{\mathrm{L}}\right] + \frac{\psi'(\varphi)}{\mathrm{L}\lambda\sin\varphi}\right\} \quad (2).$$

33. *Condition pour qu'un double système de lignes découpe la surface en losanges infiniment petits à angles variables.*

Soit tracé (*fig.* 6) le réseau des deux systèmes de lignes, l'on

Fig. 6.



a d'après les formules (8″), en remarquant que AA′ égale BA, et en représentant par μ le sinus de l'angle φ,

$$\mathrm{A'B'} - \mathrm{AB} = \frac{\overline{\mathrm{AA'}}^2}{\mu\lambda_1},$$

$$\mathrm{B'B''} - \mathrm{B'A'} = \overline{\mathrm{B'A'}}^2\left(\frac{1}{\mu\lambda} + d_\rho\frac{1}{\mu\lambda}\right).$$

Si l'on ajoute ces deux égalités membre à membre, et qu'on élimine du second membre de l'équation résultante B'A' au moyen de la première égalité, l'on obtient, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\mathrm{B'B''} - \mathrm{AB} = \overline{\mathrm{AA'}}^2 \frac{1}{\mu\lambda_1} + \overline{\mathrm{AB}}^2 \left(\frac{1}{\mu\lambda} + d_\rho \frac{1}{\mu\lambda}\right) + 2\mathrm{AB}.\overline{\mathrm{AA'}}^2 \left(\frac{1}{\mu^2\lambda\lambda_1}\right);$$

on trouvera de même

$$\mathrm{B'B''} - \mathrm{AA'} = \overline{\mathrm{AB}}^2 \frac{1}{\mu\lambda} + \overline{\mathrm{AA'}}^2 \left(\frac{1}{\mu\lambda_1} + d_{\rho_1} \frac{1}{\mu\lambda_1}\right) + 2\mathrm{AA'}.\overline{\mathrm{AB}}^2 \frac{1}{\mu^2\lambda\lambda_1}.$$

En identifiant ces deux résultats, on obtient la condition suivante, qui est d'une grande simplicité malgré la généralité du problème :

$$(14) \qquad d_\rho \frac{1}{\lambda \sin\varphi} = d_{\rho_1} \frac{1}{\lambda_1 \sin\varphi}.$$

Ainsi la condition pour qu'un double système de lignes découpe la surface en losanges infiniment petits à angles variables est que les différentielles des deux composantes $\frac{1}{\mu\lambda}$, $\frac{1}{\mu\lambda_1}$, par rapport aux paramètres réciproques, soient égales.

CHAPITRE III.

RELATIONS ENTRE LES VARIATIONS DES COURBURES DES LIGNES COORDONNÉES.

34. *Des variations des cosinus des angles que les arcs coordonnés font avec une direction fixe.* — Soit ox la direction fixe dont il s'agit. Les variations des cosinus des angles que les arcs coordonnés font avec cette direction peuvent être prises par rapport à l'un des deux paramètres ρ ou ρ_1. Il résulte de ce qui a été établi au nº 28 que la variation d'un cosinus X par rapport au paramètre ρ_1, c'est-à-dire lorsqu'on passe d'une courbe à la courbe infiniment voisine de la même série, est donnée par le type

$$(1) \quad d_1 X = d\sigma_1 \left(-\frac{\cot\varphi}{L_1} X + \frac{1}{L_1 \sin\varphi} X_1 + \frac{1}{l_1} X_2 \right) \quad (2) \quad [3].$$

Si l'on remarque que l'on a $\frac{dX}{d\sigma} = \frac{\cos(\mathfrak{R}, x)}{\mathfrak{R}}$, formule (5), nº 10, et que l'on remplace dans le second membre la composante de la courbure propre $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ suivant l'axe des x par la somme des projections sur le même axe des composantes de cette courbure suivant les trois directions $d\sigma$, $d\sigma_1$ et la normale à la surface F, on obtiendra la variation d'un cosinus X par rapport au paramètre ρ, c'est-à-dire lorsqu'on passe d'un point d'une ligne coordonnée $d\sigma$ au point infiniment voisin de la même ligne,

$$(2) \quad d_0 X = d\sigma \left(-\frac{\cot\varphi}{R} X + \frac{1}{R \sin\varphi} X_1 + \frac{1}{r} X_2 \right) \quad (2) \quad [3].$$

35. *Des variations des cosinus des angles que la normale à la surface fait avec l'axe des x.* — D'après le théorème du nº 6,

qui donne la direction d'une perpendiculaire à deux droites données, on a

$$X_2 \sin\varphi = YZ_1 - ZY_1;$$

or, si l'on différentie par rapport à ρ, on obtient

$$\cos\varphi \frac{d\varphi}{d\rho} X_2 + \sin\varphi \frac{dX_2}{d\rho} = \frac{Z_1 dY - Y_1 dZ}{d\rho} + \frac{Y dZ_1 - Z dY_1}{d\rho},$$

si l'on remplace dans le second membre les variations de Y, Z, Y_1, Z_1 par leurs valeurs tirées des formules du numéro précédent, et si, de plus, on a égard aux relations du n° 26, on obtient

$$\sin\varphi \frac{dX_2}{d\sigma} = -\frac{\cos(R_1, x)}{r} - \frac{\cos(R, x)}{l} \quad (2) \quad [3].$$

Considérons les deux trièdres formés, le premier par les trois directions ox, oR, $d\sigma_1$, et le second par les trois directions ox, $d\sigma$, $d\sigma_1$, on obtient les deux équations, dans lesquelles V_1 représente le dièdre suivant $d\sigma_1$,

$$\cos(R, x) = \cos(x, d\sigma_1)\sin\varphi + \sin(x, d\sigma_1)\cos\varphi\cos V_1,$$
$$\cos(x, d\sigma) = \cos(x, d\sigma_1)\cos\varphi - \sin(x, d\sigma_1)\sin\varphi\cos V_1.$$

L'élimination de V_1 entre ces deux équations donne le type suivant :

$$\sin\varphi\cos(R, x) = X_1 - X\cos\varphi \quad (2),$$

lequel fait connaître les valeurs de $\cos(R, x)$, $\cos(R_1, x)$. En ayant égard à ces deux valeurs, on obtient définitivement

$$(3) \quad \sin^2\varphi \frac{dX_2}{d\sigma} = -\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos\varphi}{l}\right)X - \left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r}\right)X_1 \quad (2) \quad [3],$$

laquelle donne les variations des cosinus des angles que la normale à la surface fait avec les trois axes des x, y, z, ces variations étant prises par rapport à l'un des deux paramètres coordonnés ρ, ρ_1.

36. *Des doubles variations d'un cosinus* X *de l'une des deux lignes coordonnées.* — La double variation de X par rapport à ρ et ρ_1 peut s'obtenir de deux manières : ou bien en

prenant la variation par rapport à ρ de $d_{\rho_1}X$, ou bien la variation par rapport à ρ_1 de $d_\rho X$. Or les expressions de ces deux différentielles ont été calculées dans le numéro précédent. Si nous faisons le calcul de la première manière, nous introduisons dans le second membre de la variation de l'équation donnée par le type (1) les variations simples par rapport à ρ de X, X_1, X_2, et si nous éliminons ces variations au moyen des équations (2), nous obtenons la variation seconde exprimée linéairement par rapport à X, X_1, X_2.

Pour abréger, nous poserons

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{L} + \frac{\cos^2\varphi}{R}\right) - \frac{1}{l_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos\varphi}{l}\right),$$

$$\frac{1}{M_1} = -\frac{\cos\varphi}{L_1}\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{R}\right) - \frac{1}{l_1}\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r}\right),$$

$$\frac{1}{M_2} = \frac{\sin\varphi}{L_1}\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r}\right),$$

nous obtiendrons ainsi pour la variation cherchée l'expression

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} d_0 d_1 X = {} & \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{X}{M} + \frac{X_1}{M_1} + \frac{X_2}{M_2}\right) \\ & - X d_0\left(\frac{d\sigma_1}{L_1}\cot\varphi\right) + X_1 d_0 \frac{d\sigma_1}{L_1 \sin\varphi} + X_2 d_0 \frac{d\sigma_1}{l_1}. \end{aligned} \right.$$

Si nous faisons le calcul de la seconde manière, en prenant la variation par rapport à ρ_1 de l'équation (2), et que nous posions

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\cos^2\varphi}{L_1}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{1}{l_1} - \frac{\cos\varphi}{r_1}\right),$$

$$\frac{1}{N_1} = -\frac{\cos\varphi}{R}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_1}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{\cos\varphi}{l_1}\right),$$

$$\frac{1}{N_2} = \frac{\sin\varphi}{R}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{\cos\varphi}{l_1}\right),$$

nous obtiendrons

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} d_1 d_0 X = {} & \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{X}{N} + \frac{X_1}{N_1} + \frac{X_2}{N_2}\right) \quad (2)\ [3] \\ & - X d_1\left(\frac{d\sigma}{R}\cot\varphi\right) + X_1 d_1 \frac{d\sigma}{R \sin\varphi} + X_2 d_1 \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les deux formes des doubles variations d'un cosinus X des courbes coordonnées par rapport à ρ et à ρ_1.

37. ***Relations entre les variations des composantes des courbures propres ou inclinées des lignes coordonnées.*** — Si l'on remarque que les deux variations secondes trouvées dans le numéro précédent doivent être identiques quels que soient X, X_1, X_2, on obtiendra par l'identification de ces deux formules trois relations entre les variations des projections des angles de contingence propre et inclinée des lignes coordonnées. Ces relations sont

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&d_1(\mathrm{I}\cot\varphi) - d_0(\mathrm{J}_1\cot\varphi)\\
&\quad = \frac{d\sigma\,d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{RR}_1} - \frac{1}{\mathrm{LL}_1}\right) + \left(\frac{1}{rr_1} - \frac{1}{ll_1}\right)\cos\varphi\right],\\
&d_1\frac{\mathrm{I}}{\sin\varphi} - d_0\frac{\mathrm{J}_1}{\sin\varphi}\\
&\quad = \frac{d\sigma\,d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{RR}_1} - \frac{1}{\mathrm{LL}_1}\right)\cos\varphi + \left(\frac{1}{rr_1} - \frac{1}{ll_1}\right)\right],\\
&d_1 i - d_0 j_1\\
&\quad = \frac{d\sigma\,d\sigma_1}{\sin\varphi}\left[\left(\frac{1}{l\mathrm{L}_1} - \frac{1}{r_1\mathrm{R}}\right) - \left(\frac{1}{r\mathrm{L}_1} - \frac{1}{l_1\mathrm{R}}\right)\cos\varphi\right] \quad [2],
\end{aligned}\right.$$

Les deux premières équations sont telles, que les seconds membres sont symétriques par rapport aux deux lignes coordonnées et à leurs courbures normale et tangentielle; donc les premiers membres ne changeront pas quand on permutera ces deux courbes. Mais il n'en est pas de même de la dernière, qui forme un type contenant deux équations. On obtiendrait les mêmes équations en prenant les doubles variations des cosinus X_2.

Les deux premières équations ne sont pas réellement distinctes l'une de l'autre. En effet, si l'on élimine entre elles le binôme $\frac{1}{rr_1} - \frac{1}{ll_1}$, on tombe sur une expression qui devient identiquement nulle par suite des formules (5) du n° 26.

Les formules (6) sont évidemment contenues dans les formules (31) de notre *Théorie des Coordonnées curvilignes quel-*

conques (p. 20). Les seconds membres de ces dernières sont linéaires par rapport aux cosinus des trois angles des lignes coordonnées; et il suffit de supposer nuls deux de ces cosinus pour passer du cas général au cas particulier qui nous occupe, et conséquemment pour trouver les formules (6) de notre texte.

Sens et portée des deux premières formules du groupe précédent. — Avant d'étudier le sens et la portée de ces formules, examinons un instant les propriétés des binômes $\frac{1}{rr_1} - \frac{1}{ll_1}$, $\frac{1}{RR_1} - \frac{1}{LL_1}$. Ils se composent de la même manière, le premier par rapport aux courbures normales propres ou inclinées, le second par rapport aux courbures tangentielles de même nom; nous représenterons par $\frac{1}{K_n^2}$, $\frac{1}{K_t^2}$ les rapports du premier et du second au carré du sinus de l'angle des lignes coordonnées, de telle sorte que

$$\frac{\sin^2\varphi}{K_n^2} = \frac{1}{rr_1} - \frac{1}{ll_1}, \quad \frac{\sin^2\varphi}{K_t^2} = \frac{1}{RR_1} - \frac{1}{LL_1}.$$

Les formules que nous venons de démontrer prouvent que le premier élément $\frac{1}{K_n^2}$ ne dépend que des variations des projections tangentielles des angles de contingence propre ou inclinée des lignes coordonnées, et par conséquent ne dépend, n° 30, que des paramètres différentiels H, H_1, G, bien que chacune des courbures normales qui entrent dans le second membre ne puisse être exprimée exclusivement en fonction de ces paramètres. Cet élément se rapporte à la surface et à sa courbure, comme nous l'établirons plus loin. Le second élément ne dépend aussi que des paramètres différentiels H, H_1, G, puisqu'il se compose exclusivement de courbures tangentielles des lignes coordonnées. Il caractérise proprement le système des lignes coordonnées projeté sur le plan tangent. Nous appellerons le premier *l'élément composé des courbures normales*, et le second *l'élément composé des courbures tangentielles*. Ces observations une fois faites, remarquons que les deux premières équations du groupe (6) peuvent s'écrire sous

la forme suivante, $d\omega$ étant l'élément superficiel,

$$(6')\quad \left\{ \begin{aligned} & d_0(\mathrm{J}_1 \cot\varphi) - d_1(\mathrm{I}\cot\varphi) \\ & \quad = d\omega\left[-\frac{\cot\varphi}{\mathrm{K}_n^2} + \sin\varphi\frac{\dfrac{d}{d\varphi}(\cot\varphi)}{\mathrm{K}_t^2}\right], \\ & d_0\left(\frac{\mathrm{J}_1}{\sin\varphi}\right) - d_1\left(\frac{\mathrm{I}}{\sin\varphi}\right) \\ & \quad = d\omega\left(-\frac{\sin^{-1}\varphi}{\mathrm{K}_n^2} + \sin\varphi\frac{\dfrac{d}{d\varphi}\sin^{-1}\varphi}{\mathrm{K}_t^2}\right). \end{aligned} \right.$$

La comparaison de ces deux formules montre qu'elles sont, l'une et l'autre, deux cas particuliers d'une formule unique tout à fait générale, telle qu'une fonction ψ de φ qu'elle renferme devient, dans le premier cas, $\cot\varphi$, et, dans le second, $\sin^{-1}\varphi$. C'est d'ailleurs ce que l'on voit directement en tirant des équations (6) les valeurs de $\frac{d\omega}{\mathrm{K}_t^2}$ et de $\frac{d\omega}{\mathrm{K}_n^2}$, et en multipliant la première par $\sin\varphi\psi''(\varphi)$ et la seconde par $-\psi'(\varphi)$, et en ajoutant, les deux fonctions $\psi''(\varphi)$, $\psi'(\varphi)$ étant les dérivées seconde et première d'une fonction tout à fait arbitraire de l'angle φ représentée par $\psi(\varphi)$; on obtient ainsi

$$[7]\quad d\omega\left[-\frac{\psi'(\varphi)}{\mathrm{K}_n^2} + \sin\varphi\frac{\psi''(\varphi)}{\mathrm{K}_t^2}\right] = d_0[\mathrm{J}_1\psi'(\varphi)] - d_1[\mathrm{I}\psi'(\varphi)] \text{ (2).}$$

Pour abréger, nous représenterons le premier membre de cette équation par $\frac{d\omega}{\mathrm{K}(\psi)}$. Si l'on a égard aux équations (5) du nº 26, la formule précédente prend l'une des deux formes

$$[10]\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\omega}{\mathrm{K}(\psi)} &= -d_0[\mathrm{I}_1\psi'(\varphi)] - d_1[\mathrm{I}\psi'(\varphi)] - d_0 d_1\psi(\varphi), \\ \frac{d\omega}{\mathrm{K}(\psi)} &= d_0[\mathrm{J}_1\psi'(\varphi)] + d_1[\mathrm{J}\psi'(\varphi)] + d_0 d_1\psi(\varphi). \end{aligned} \right.$$

Ces deux formules forment un système de deux équations dont la résolution donne séparément les deux éléments $\frac{d\omega}{\mathrm{K}(\psi)}$

et $d_0 d_1 \psi(\varphi)$; les valeurs de ces éléments sont donc

$$[8] \left\{ \begin{aligned} \frac{2d\omega}{K(\psi)} &= d_0[(J_1 - I_1)\psi'(\varphi)] + d_1[(J - I)\psi'(\varphi)], \\ 2d_0 d_1 \psi(\varphi) &= -d_0[(J_1 + I_1)\psi'(\varphi)] - d_1[(J + I)\psi'(\varphi)]. \end{aligned} \right.$$

Or, d'après les deux équations contenues dans le type (5) du n° **26**, l'on a

$$\psi'(\varphi)(J_1 + I_1) = -\psi'(\varphi) d_1\varphi, \quad \psi'(\varphi)(J + I) = -\psi'(\varphi) d_0\varphi,$$

et conséquemment par la différentiation

$$d_0[(J_1 + I_1)\psi'(\varphi)] = d_1[(J + I)\psi'(\varphi)] = -d_1 d_0 \psi(\varphi);$$

on aura donc aussi les valeurs suivantes des deux éléments dont il s'agit :

$$[9] \left\{ \begin{aligned} \frac{d\omega}{K(\psi)} &= -d_0[I_1\psi'(\varphi)] + d_1[J\psi'(\varphi)] \\ &= d_0[J_1\psi'(\varphi)] - d_1[I\psi'(\varphi)], \\ -d_1 d_0 \psi(\varphi) &= d_1[(J + I)\psi'(\varphi)] = d_0[J_1 + I_1)\psi'(\varphi)]. \end{aligned} \right.$$

Ces différentes formules, qui sont des transformations de la formule (7), ont une haute généralité à cause de la fonction arbitraire $\psi(\varphi)$ qu'elles contiennent.

38 *Diverses formes de la fonction* ψ. — 1° Étudions la forme la plus simple de la fonction $\psi(\varphi)$, et supposons qu'elle est proportionnelle à l'angle φ. Si l'on pose $\psi(\varphi) = \varphi$ dans les formules précédentes, on trouve, à la place de l'équation [7], la formule (7) suivante

$$(7) \qquad -\frac{d\omega}{K_n^2} = d_0 J_1 - d_1 I \quad (2).$$

Les formules [8] produisent les deux suivantes :

$$(8) \left\{ \begin{aligned} -\frac{2d\omega}{K_n^2} &= d_0(J_1 - I) + d_1(J - I), \\ 2d_0 d_1 \varphi &= -d_0(J_1 + I_1) - d_1(J + I). \end{aligned} \right.$$

Les formules (7) donnent naissance à la proposition suivante, de forme nouvelle :

THÉORÈME. — *Si l'on prend les variations des projections tangentielles des deux angles, l'un de contingence inclinée, l'autre de contingence propre de deux lignes coordonnées suivant les paramètres correspondants, le rapport de la différence de ces variations à l'élément superficiel reste invariable pour un point de la surface, quel que soit le système des coordonnées, et égale l'élément composé des courbures normales* $\frac{1}{K_n^2}$.

Les formules [10] produisent les deux suivantes :

$$(10)\quad \begin{cases} d_1 I + d_0 I_1 = -\, d_1 d_0 \varphi + \dfrac{d\omega}{K_n^2}, \\[2mm] d_1 J + d_0 J_1 = -\, d_0 d_1 \varphi - \dfrac{d\omega}{K_n^2} \ (*), \end{cases}$$

qui sont relatives, l'une à la somme des variations des projections tangentielles des angles de contingence et représente un théorème bien connu sur l'expression de la courbure de la surface, l'autre à la somme des variations des projections tangentielles des angles de contingence inclinée et donne un théorème nouveau sur l'expression de la courbure de la surface en fonction des projections tangentielles des angles de contingence inclinée.

Ces formules, ainsi que celles du numéro précédent, se réduisent à des formes plus simples, suivant la nature des lignes coordonnées.

Si le système est formé de deux lignes se coupant sous angle constant, les formules (10) deviennent

$$(7')\quad \left(\frac{d\omega}{K_n^2} = d_1 I + d_0 I_1, \quad -\frac{d\omega}{K_n^2} = d_1 J + d_0 J_1\right).$$

Or, d'après les formules (5) du n° 26, ces deux équations se confondent en une seule.

Si l'une des coordonnées *ds* est géodésique, l'une des équa-

(*) *Voyez* le § VI de notre Mémoire sur les coordonnées curvilignes (*Journal de Crelle*, t. LVIII).

tions (7) devient

$$-\frac{1}{K_n^2}=\frac{d_0 J_1}{d\omega},$$

et la première des équations (10) donne

$$d_0 d_1 \varphi + d_0 I_1 = \frac{d\omega}{K_n^2}.$$

Si enfin les deux lignes du système sont géodésiques, on obtient

$$d_0 d_1 \varphi = \frac{d\omega}{K_n^2}.$$

2° Une autre forme de la fonction ψ qui peut être remarquée, est $\psi(\varphi)=\cos\varphi$. Dans ce cas, $\frac{1}{K(\psi)}$ devient

$$\sin\varphi\left(\frac{1}{K_n^2}-\frac{\cos\varphi}{K_t^2}\right).$$

Or, si l'on observe que l'on a

$$\frac{1}{R}=\frac{\sin(n,\mathfrak{R})}{\mathfrak{R}}, \quad \frac{1}{r}=\frac{\cos(n,\mathfrak{R})}{\mathfrak{R}},$$

et des relations semblables pour $\frac{1}{L}, \frac{1}{l}, \frac{1}{R_1}, \frac{1}{r_1}, \frac{1}{L_1}, \frac{1}{l_1}$, l'expression précédente se transforme au moyen des deux trièdres formés, le premier par la direction de la normale n et les directions de $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$; le second par la direction de la même normale et les directions de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1$. Or, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}_1$, n se trouvant dans un plan normal, et $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{R}$, n, dans un autre plan normal, cette expression devient

$$\frac{1}{\sin\varphi}\left[\frac{\cos(\mathfrak{R},\mathfrak{R}_1)}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1}-\frac{\cos(\mathfrak{L},\mathfrak{L}_1)}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1}\right],$$

de sorte que les équations [7] et [10] deviennent

$$d_1(I\sin\varphi)-d_0(J_1\sin\varphi)$$
$$=d\sigma\, d\sigma_1\left[\frac{\cos(\mathfrak{R},\mathfrak{R}_1)}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1}-\frac{\cos(\mathfrak{L},\mathfrak{L}_1)}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1}\right],$$

$$d_1(\mathrm{I}\sin\varphi) + d(\mathrm{I}_1\sin\varphi)$$
$$= d\sigma\, d\sigma_1\left[\frac{\cos(\mathfrak{R},\mathfrak{R}_1)}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1} - \frac{\cos(\mathfrak{L},\mathfrak{L}_1)}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1}\right] + d_0 d_1 \cos\varphi.$$

3° La forme de la fonction ψ donnée par $\psi(\varphi) = \log\sin\varphi$ nous est signalée par la première des équations (6′); elle donne pour valeur de $\frac{d\omega}{\mathrm{K}(\psi)}$ l'expression suivante :

$$-\, d\sigma\, d\sigma_1\left(\frac{\cos\varphi}{\mathrm{K}_n^2} + \frac{1}{\mathrm{K}_t^2}\right).$$

Or, si pour abréger on représente par u et v les deux faces opposées à la normale n de deux trièdres aussi faciles à déterminer que les deux précédents, cette expression deviendra

$$+\, \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\cos v}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1} - \frac{\cos u}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1}\right).$$

D'après cela, la formule [10] donnera

$$d_1(\mathrm{I}\cot\varphi) + d_0(\mathrm{I}_1\cot\varphi)$$
$$= -\, \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\cos v}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1} - \frac{\cos u}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1}\right) - d_0 d_1(\log\sin\varphi).$$

4° La forme $\psi = \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$ nous est aussi signalée par la seconde des équations (6′). Dans le cas présent, l'élément $\frac{1}{\mathrm{K}(\psi)}$ devient

$$-\, d\sigma\, d\sigma_1\left(\frac{1}{\mathrm{K}_n^2} + \frac{\cos\varphi}{\mathrm{K}_t^2}\right),$$

et il y a encore deux trièdres qui se présentent dans la question, et qui ont pour arête commune la normale; ils sont tels que, si l'on appelle u_1, v_1 les faces opposées à la normale, l'expression précédente devient

$$-\, \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\cos u_1}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1} - \frac{\cos v_1}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1}\right),$$

et alors la première des équations (10) devient

$$d_1\left(\frac{\mathrm{I}}{\sin\varphi}\right) + d_0\left(\frac{\mathrm{I}_1}{\sin\varphi}\right)$$
$$= \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\cos u_1}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1} - \frac{\cos v_1}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1}\right) - d_0 d_1\left(\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\right).$$

39. *Discussion des équations* (10). — Nous nous occuperons seulement de la première de ces équations, car il sera facile d'appliquer à la seconde ce qui aura été dit de la première.

1° Si l'angle des coordonnées φ est de la forme

$$\varphi = \text{const.} + \psi(\rho) + \psi_1(\rho_1),$$

la première des équations (10) devient

$$\frac{d_1\mathrm{I} + d_0\mathrm{I}_1}{d\omega} = \frac{1}{\mathrm{K}_n^2};$$

le rapport de la somme des variations des angles de contingences des lignes coordonnées à l'élément de surface estimé dans ce système est indépendant du système coordonné.

2° Si φ est donné par l'équation aux différences partielles n° 31.

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho\, d\rho_1} - \frac{\sqrt{\mathrm{H}^2\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}^4}}{\mathrm{K}_n^2} = 0,$$

l'on obtient par l'intégration de cette équation

$$\varphi = \psi(\rho) + \psi_1(\rho_1) + \int_0^{\rho} d\rho \int_0^{\rho_1} d\rho_1 \frac{\sqrt{\mathrm{H}^2\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}^4}}{\mathrm{K}_n^2}.$$

Dans ce cas, la première des équations (10) devient

$$d_{\rho_1}\mathrm{I} + d_{\rho}\mathrm{I}_1 = 0,$$

c'est-à-dire que la somme des variations des angles de con-

tingence suivant leurs paramètres correspondants est nulle. Ainsi l'on obtient sur la surface F la même propriété que sur le plan ou sur une surface développable, lorsque le système de coordonnées tracées sur ce plan ou sur cette développable est tel, que ces courbes se coupent sous un angle constant. En effet, dans cette double hypothèse $\frac{1}{K_n^2}$ est nul, comme on le verra plus tard, et la variation de φ est nulle; donc l'équation aux différences partielles est satisfaite.

40. *Transformation des équations précédentes.* — Si l'on porte dans les équations (7) du n° **38** les variations des angles de contingence propre et inclinée trouvées au n° **32**, l'on obtient

$$(9')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L_1}\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{R\lambda}-\frac{1}{L_1\lambda_1}\right)\frac{1}{\sin\varphi}-\frac{\sin\varphi}{K_n^2}=0\quad[2],\end{aligned}\right.$$

laquelle est une relation entre les variations des courbures propre et inclinée de deux lignes coordonnées par rapport aux arcs réciproques.

En opérant de même sur les équations (10) du même numéro, l'on obtient

$$(10')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\left(\frac{1}{R\lambda}+\frac{1}{R_1\lambda_1}\right)\frac{1}{\sin\varphi}\\ &\qquad+\frac{d^2\varphi}{d\rho\, d\rho_1}\frac{d\rho}{d\sigma}\frac{d\rho_1}{d\sigma_1}-\frac{1}{K_n^2}=0,\\ &\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{L}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L_1}\right)+\left(\frac{1}{L\lambda}+\frac{1}{L_1\lambda_1}\right)\frac{1}{\sin\varphi}\\ &\qquad+\frac{d^2\varphi}{d\rho\, d\rho_1}\frac{d\rho}{d\sigma}\frac{d\rho_1}{d\sigma_1}+\frac{1}{K_n^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Cette dernière ne contient d'autres courbures que les courbures inclinées des courbes coordonnées. Si l'on élimine les courbures inclinées de la précédente, au moyen des rela-

tions (5) du Chapitre II, l'on obtient l'équation

$$\sin\varphi\left[\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right)\right]-\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_1^2}+2\frac{\cos\varphi}{RR_1}\right)$$
$$-\frac{d\varphi}{d\sigma}\left(\frac{1}{R}+\frac{\cos\varphi}{R_1}\right)-\frac{d\varphi}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\cos\varphi}{R}\right)$$
$$+\left(\frac{d^2\varphi}{d\rho\, d\rho_1}\frac{d\rho}{d\sigma}\frac{d\rho_1}{d\sigma_1}+\frac{1}{K_n^2}\right)\sin\varphi=0,$$

qui a été donnée par M. Cauchy, en 1844 (*).

La deuxième des équations (10) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L_1}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{L}\right)+\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{L_1^2}+\frac{2\cos\varphi}{LL_1}\right)\frac{1}{\sin\varphi}$$
$$+\frac{d^2\varphi}{d\rho\, d\rho_1}\frac{d\rho}{d\sigma}\frac{d\rho_1}{d\sigma_1}+\frac{1}{K^2}=0.$$

Si le système est oblique sous angle constant, ces deux dernières formules deviennent

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right)-\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_1^2}+2\frac{\cos\varphi}{RR_1}\right)-\frac{1}{K_n^2}=0.$$

Si le système est rectangulaire, on retrouve une formule due à M. O. Bonnet :

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right)-\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_1^2}\right)-\frac{1}{K_n^2}=0.$$

Si, l'angle des coordonnées étant constant, l'une des deux courbes $d\sigma_1$ est géodésique, on obtient la formule

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R^2}-\frac{1}{K_n^2}=0.$$

Formules générales. — Les formules que nous venons de développer dans le présent numéro, sont relatives à la va-

(*) *Voyez* les *Comptes rendus*, t. XI, et les §§ X et XI de notre Mémoire sur les coordonnées curvilignes (*Journal de Crelle*, t. LVIII), où toutes ces formules se trouvent développées.

leur particulière de la fonction $\psi(\varphi) = \varphi$. Il est bon de développer aussi les formules analogues qui se rapportent à la forme générale de la fonction. Si l'on porte les valeurs des variations $I\psi'(\varphi)$, $J\psi'(\varphi)$ [12], [13] du n° 32, dans les formules [9], [8], [10] du n° 37, on obtient :

$$[9'] \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{K(\psi)} = &- \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\psi'(\varphi)}{R_1}\right] + \frac{d}{d\sigma_1}\left[\frac{\psi'(\varphi)}{L_1}\right] \\ &- \frac{\psi'(\varphi)}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{R_1\lambda_1} - \frac{1}{L\lambda}\right) \quad (2), \end{aligned} \right.$$

$$[10'] \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\sin\varphi}{K(\psi)} &= \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\psi'(\varphi)}{R_1}\right] + \frac{d}{d\sigma_1}\left[\frac{\psi'(\varphi)}{R}\right] \\ &\quad + \psi'(\varphi)\left(\frac{1}{R_1\lambda_1} + \frac{1}{R\lambda}\right) + \frac{d_1 d_0 \psi(\varphi)}{d\rho\, d\rho_1}, \\ \frac{\sin\varphi}{K(\psi)} &= \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\psi'(\varphi)}{L_1}\right] + \frac{d}{d\sigma_1}\left[\frac{\psi'(\varphi)}{L}\right] \\ &\quad + \psi'(\varphi)\left(\frac{1}{L_1\lambda_1} + \frac{1}{L\lambda}\right) + \frac{d_1 d_0 \psi(\varphi)}{d\rho\, d\rho_1}, \end{aligned} \right.$$

desquelles on déduira sans difficulté les formules qui se rapportent à tout système particulier de lignes coordonnées.

Si le système est simplement géodésique, l'on aura à la place de (9') la relation

$$(9'') \qquad \frac{\sin\varphi}{K(\psi)} = \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\psi'(\varphi)}{L_1}\right] + \frac{\psi'(\varphi)}{\sin\varphi}\,\frac{1}{L_1\lambda_1}.$$

Si maintenant on particularise la fonction ψ, comme on l'a fait au n° 38, on obtiendra les formules correspondantes à chacune des valeurs de ψ.

41. *Deuxième transformation des équations du* n° **38**. — Un caractère essentiel des équations (7) et de leurs transformées est que chacune d'elles donne la valeur de la grandeur géométrique $\frac{1}{K_n^2}$ exclusivement en fonction des arcs coordonnés, de l'angle qu'ils font entre eux, et de leurs variations, ce qui permet d'exprimer cette grandeur au moyen des trois paramètres différentiels H, H_1, G. En effet, si l'on porte les valeurs

de I_1 et de J tirées des équations (9) du n° 30, dans les équations (7) du n° 38, on trouve

$$(9'')\left\{\begin{aligned} & d_1\left[\frac{d_1 d\sigma - d_0(\cos\varphi\, d\sigma_1)}{\sin\varphi\, d\sigma_1}\right] + d_0\left(\frac{d_0 d\sigma_1 - \cos\varphi\, d_1 d\sigma}{\sin\varphi\, d\sigma}\right) \\ & \quad = -\frac{d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi}{K_n^2} \quad [2], \end{aligned}\right.$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante, qui est tout à fait symétrique,

$$(10'')\left\{\begin{aligned} & d_1\left[\frac{d_1 d\sigma - d_0(\cos\varphi\, d\sigma_1)}{\sin\varphi\, d\sigma_1}\right] + d_0\left[\frac{d_0 d\sigma_1 - d_1(\cos\varphi\, d\sigma)}{\sin\varphi\, d\sigma}\right] \\ & \quad = d_1 d_0 \varphi - \frac{d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi}{K_n^2} \quad [1]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on introduit les paramètres H, H_1, G dans ces formules, l'on trouve

$$(9''')\left\{\begin{aligned} & \frac{d}{d\rho_1}\left[\frac{\dfrac{dH}{d\rho_1} - \dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{G^2}{H}\right)}{\sqrt{H_1^2 - \dfrac{G^4}{H^2}}}\right] + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\dfrac{dH_1}{d\rho} - \dfrac{G^2}{HH_1}\dfrac{dH}{d\rho_1}}{\sqrt{H^2 - \dfrac{G^4}{H_1^2}}}\right) \\ & \quad = -\frac{\sqrt{H^2H_1^2 - G^4}}{K_n^2} \quad [2]. \end{aligned}\right.$$

On tire de cette formule cette conclusion importante, que si l'on a différentes surfaces sur lesquelles l'on puisse tracer des systèmes de coordonnés tels, que lorsqu'on passe d'une surface à l'autre, les quantités H, H_1, G ne changent pas, l'expression $\frac{1}{K_n^2}$ ne changera pas pour ces différentes surfaces.

Nous ferons maintenant sur ces équations les remarques suivantes :

1° Si une des deux séries (ρ_1) des lignes coordonnées est composée de lignes géodésiques, φ restant variable, l'équation (9″) se réduit à deux termes, l'on obtient alors

$$d_0\left(\frac{d_0 d\sigma_1 - \cos\varphi\, d_1 d\sigma}{\sin\varphi\, d\sigma}\right) = -\frac{d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi}{K_n^2}.$$

Or, dans ce cas la formule (10), n° 30, dont le premier membre est nul, donne

$$d_1 d\sigma = d_0(\cos\varphi\, d\sigma_1),$$

et, en ayant égard à cette valeur, l'équation devient

$$\frac{d_0^2(\sin\varphi\, d\sigma_1)}{d\sigma^2} = -\frac{\sin\varphi\, d\sigma_1}{K_n^2}.$$

Si, de plus, le système est orthogonal, l'équation précédente ne sera pas simplifiée, puisque l'on aura

$$(9^{iv}) \qquad \frac{d_0^2\, d\sigma_1}{d\sigma^2} = -\frac{d\sigma_1}{K_n^2},$$

qui est de même forme que la précédente. Ces deux équations ont une grande importance, et sont très-utiles soit dans la théorie des surfaces, soit dans la théorie des lignes tracées sur ces surfaces. Il est inutile de remarquer que la première de ces deux formules se déduit aussi de la seconde, puisque $\sin\varphi\, d\sigma_1$ représente la projection de l'arc $d\sigma_1$ sur l'arc orthogonal, et ne diffère pas en grandeur de la portion de cet arc comprise entre les deux lignes géodésiques qui passent par les deux extrémités de $d\sigma_1$.

2° Si les deux séries des lignes coordonnées du système sont composées de lignes géodésiques, l'on a l'équation déjà trouvée

$$(9^{v}) \qquad d_0 d_1 \varphi - \frac{d\omega}{K_n^2} = 0,$$

laquelle est indépendante des variations des arcs coordonnés; elle prouve que, dans ce système, la grandeur $\frac{1}{K_n^2}$ est le rapport de la double variation $d_1 d_0 \varphi$ de l'angle des lignes coordonnées à l'élément superficiel $d\omega$.

3° Lorsque les lignes coordonnées sont assujetties à cette seule condition de se couper à angles droits, on retrouve l'équation connue

$$\frac{d_1^2\, d\sigma}{d\sigma_1} + \frac{d_0^2\, d\sigma_1}{d\sigma} = -\frac{d\sigma\, d\sigma_1}{K_n^2}.$$

Formules générales. — Si l'on veut obtenir les formules

générales correspondantes aux formules du présent numéro, il n'y a qu'à éliminer I, J,... entre les formules [9], [8], [10] du n° 37 et les formules (9) et (10) du n° 30, on obtient ainsi

$$[9''] \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\omega}{K(\psi)} &= d_1\left[\frac{\psi'(\varphi)}{\sin\varphi}\,\frac{d_1\,d\sigma - d_0(\cos\varphi\,d\sigma_1)}{d\sigma_1}\right] \\ &\quad + d_0\left[\frac{\psi'(\varphi)}{\sin\varphi}\,\frac{d_0\,d\sigma_1 - \cos\varphi\,d_1\,d\sigma}{d\sigma}\right], \end{aligned} \right.$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante, qui est tout à fait symétrique par rapport aux deux lignes coordonnées,

$$[10''] \quad \left\{ \begin{aligned} & d_1\left[\frac{\psi'(\varphi)}{\sin\varphi}\,\frac{d_1\,d\sigma - d_0(\cos\varphi\,d\sigma_1)}{d\sigma_1}\right] \\ & \quad + d_0\left[\frac{\psi'(\varphi)}{\sin\varphi}\,\frac{d_0\,d\sigma - d_1(\cos\varphi\,d\sigma)}{d\sigma}\right] = \frac{d_1\,d_0\,\psi(\varphi)}{d\sigma\,d\sigma} + \frac{d\omega}{K(\psi)}, \end{aligned} \right.$$

desquelles on tirera des conclusions analogues à celles qui se rapportent aux équations (9″) et (10″). Ces conclusions font voir que les conditions sur l'invariabilité de l'élément $\frac{1}{K(\psi)}$, quand on passe d'une surface à l'autre, sont les mêmes que celles que nous avons trouvées pour l'invariabilité de l'élément $\frac{1}{K_n^2}$.

42. *Relations entre les variations des composantes normales des courbures propres ou inclinées.* — Si dans la troisième des équations (6) on remplace i par $\frac{d\sigma}{r}$, j_1 par $\frac{d\sigma_1}{l_1}$, et qu'après les différentiations on substitue aux variations des arcs coordonnés leurs valeurs trouvées dans les formules (8) du n° 28, on obtient, en remarquant que les courbures $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{l_1}$ sont égales,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{l}\right) \\ & \quad = \frac{1}{\sin\varphi}\left[\frac{2}{L_1}\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r}\right) - \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos\varphi}{l}\right) \right. \\ & \qquad \left. - \frac{1}{R}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{\cos\varphi}{l}\right)\right], \end{aligned} \right.$$

$$(11)\ [\text{suite}]\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\sigma}{d}\left(\frac{1}{r_1}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{l}\right)\\ &\quad=\frac{1}{\sin\varphi}\left[\frac{2}{L}\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r_1}\right)-\frac{1}{L}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{\cos\varphi}{l}\right)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{\cos\varphi}{l}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute ces deux équations membre à membre, l'on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r_1}\right)-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{l}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{l}\right)\\ &\quad=\frac{1}{\sin\varphi}\left[\frac{2}{l}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{L_1}\right)-2\cos\varphi\left(\frac{1}{L_1 r}+\frac{1}{L r_1}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{d\varphi}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{\cos\varphi}{l}\right)+\frac{d\varphi}{d\sigma}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{\cos\varphi}{l}\right)\right],\end{aligned}$$

qui est symétrique par rapport aux deux lignes coordonnées.

Si le système est orthogonal, les deux premières équations deviennent

$$(11')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{l}\right)+\frac{1}{R_1}\left(\frac{2}{l}-\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{R r_1}=0,\\ &\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r_1}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{l}\right)+\frac{1}{R}\left(\frac{2}{l}-\frac{1}{r_1}\right)+\frac{1}{R_1 r}=0.\end{aligned}\right.$$

Si de plus les courbes d'une série $d\sigma$ sont géodésiques, les équations se réduisent, et l'on obtient

$$(11'')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{l}\right)+\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{r}\right)=0,\\ &\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r_1}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{l}\right)+\frac{1}{R_1 r}=0.\end{aligned}\right.$$

43. *Problèmes résultants.* — Les formules que nous venons d'établir permettent de résoudre le problème direct des coordonnées curvilignes tracées sur une surface. En effet, lorsqu'on connaît l'équation de la surface, et les équations des deux courbes coordonnées en fonction de deux paramètres ρ, ρ_1,

on détermine, au moyen de ces formules, tous les éléments géométriques de ces deux courbes, ainsi que les relations qui existent entre eux. Cette question ne dépend que de différentiations. Mais nos formules permettent aussi de résoudre les questions inverses, soit qu'elles se rapportent à la théorie des lignes coordonnées, soit à la théorie des surfaces elles-mêmes. Ces questions dépendent alors du calcul intégral.

Supposons, par exemple, que l'on se donne la composition des paramètres H, H_1, G en fonction des paramètres ρ, ρ_1, et qu'on recherche toutes les surfaces pour lesquelles ces paramètres conservent la même valeur.

Il y a trois équations fondamentales du problème, qui sont l'équation (9″) et les équations (11), dans lesquelles les trois inconnues sont $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$, puisque les arcs et leurs variations sont des fonctions connues de ρ et ρ_1. La première équation est finie et de la forme

$$\frac{1}{rr_1}-\frac{1}{l^2}=\frac{1}{K_n^2},$$

le second membre étant une fonction déterminée de ρ et ρ_1; les deux autres équations sont aux différences partielles et linéaires par rapport aux mêmes inconnues ou à leurs dérivées, les coefficients étant des fonctions de ρ, ρ_1. L'intégration de ces trois équations simultanées fera connaître ces trois inconnues en fonction des mêmes paramètres. Cela fait, si l'on a égard à ces valeurs, les équations renfermées dans les types (1), (2), (3) du présent Chapitre, que l'on classera par groupes de trois équations, détermineront les neuf cosinus X, X_1, X_2; Y, Y_1, Y_2; Z, Z_1, Z_2 en fonction de ρ, ρ_1; enfin l'on déduira de ces valeurs les expressions de x, y, z en fonction des mêmes paramètres, ce qui fera connaître la surface, ou plutôt les surfaces cherchées.

On pourrait aussi se proposer de déterminer la surface ou, plus généralement, les surfaces telles, que les paramètres $H_{(0)}$, $H_{(1)}$, $G_{(1)}$ auraient, avec les paramètres H, H_1, G d'une surface donnée, des relations soit finies, soit infinitésimales, et il est évident que, lorsqu'on aurait déterminé les inconnues $H_{(0)}$,

$H_{(1)}$, $G_{(1)}$ en fonction des paramètres ρ, ρ_1, le problème s'achèverait comme le précédent.

Il serait facile de démontrer que tous les éléments de solution des questions les plus élevées de la théorie des surfaces sont renfermés dans nos formules de coordonnées curvilignes; mais il est inutile de poursuivre cet ordre d'idées, qui nous éloignerait du but que nous nous proposons, but plus modeste et plus proportionné à nos forces.

CHAPITRE IV.

D'UNE COURBE QUELCONQUE TRACÉE SUR UNE SURFACE.

44. *Différentielles de l'arc et de l'aire.* — Soit une courbe s quelconque tracée sur la surface F, et rapportée à un système de coordonnées curvilignes ρ, ρ_1 tracées aussi sur la surface. L'élément ds de cette courbe est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres sont $d\sigma$, $d\sigma_1$; en appelant α, β les angles que cet élément forme avec $d\sigma$, $d\sigma_1$, l'on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{ds}{\sin\varphi} = \dfrac{d\sigma}{\sin\beta} = \dfrac{d\sigma_1}{\sin\alpha}, \\ ds\cos\alpha = d\sigma + d\sigma_1\cos\varphi, \quad ds\cos\beta = d\sigma_1 + d\sigma\cos\varphi, \end{array}\right.$$

lesquelles font connaître la direction de l'élément ds par rapport aux lignes coordonnées, ainsi que la grandeur de cet élément.

L'aire du triangle désigné a pour expression la moitié du produit des deux côtés $d\sigma$, $d\sigma_1$ par le sinus de l'angle compris. Cette aire est la différentielle de l'aire déterminée sur la surface par la courbe s, de sorte qu'en représentant par du cette différentielle, on a

$$(2)\qquad du = \frac{1}{2}\, d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi.$$

Rectification. — L'équation de la courbe est une relation entre les paramètres ρ et ρ_1. Soit cette équation

$$(3)\qquad \rho_1 = \psi(\rho),$$

la différentielle ds de la courbe ne sera donc fonction que d'une seule variable ρ, donc l'intégrale de cette différentielle entre les paramètres $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$ donnera la longueur de l'arc s compris entre les deux courbes de la série ρ, savoir $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$.

Quadrature. — Si l'on remarque que la différentielle du a la forme $\Phi(\rho, \rho_1)\,d\rho\, d\rho_1$ et qu'on intègre une première fois cette différentielle par rapport à ρ_1 entre les limites $\rho_1 = \rho_1^{(1)}$ et $\rho_1 = \psi(\rho)$, on aura la tranche découpée sur la surface F par les deux courbes ρ, $\rho + d\rho$, et limitée, d'une part, par la courbe $\rho_1 = \rho_1^{(1)}$ et, de l'autre, par la courbe $\rho_1 = \psi(\rho)$; l'expression ainsi obtenue ne sera plus qu'une différentielle simple de ρ; si on l'intègre entre deux valeurs de ρ, $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$, on aura l'aire de la surface limitée entre les quatre courbes $\rho_1 = \rho_1^{(1)}$ et $\rho_1 = \psi(\rho)$; $\rho = \rho^{(1)}$, $\rho = \rho^{(2)}$.

45. *Courbure d'une courbe s; ses composantes.* — Les angles que la tangente à la courbe ds fait avec les trois axes rectangulaires x, y, z sont donnés par les rapports de dx, dy, dz à ds, dans lesquels les numérateurs sont les différentielles complètes de x, y, z par rapport à ρ et ρ_1. On aura donc

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} + \frac{dx}{d\sigma_1}\frac{d\sigma_1}{ds} \quad [3].$$

Si l'on prend la différentielle totale des deux membres, et qu'on divise par ds, l'on aura

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) &= \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)\frac{d\sigma^2}{ds^2} + \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\right)\frac{d\sigma_1^2}{ds^2} \\ &+ \left[\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\right)\right]\frac{d\sigma}{ds}\frac{d\sigma_1}{ds} \\ &+ \frac{dx}{d\sigma}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right) + \frac{dx}{d\sigma_1}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\sigma_1}{ds}\right);\end{aligned}$$

or, si nous représentons par $\frac{1}{\mathfrak{P}}$ la courbure de la courbe ds, par $\frac{1}{P_0}$, $\frac{1}{P_1}$, $\frac{1}{p}$ ses trois composantes suivant les deux lignes coordonnées $d\sigma$, $d\sigma_1$ et la normale à la surface, l'on aura (28)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{X}{P_0} + \frac{X_1}{P_1} + \frac{X_2}{p}.$$

Si l'on porte cette valeur dans le premier membre de l'équation précédente, et qu'on mette dans le second membre les

valeurs de $\frac{dX}{d\sigma}, \frac{dX_1}{d\sigma_1}, \frac{dX_1}{d\sigma}, \frac{dX}{d\sigma_1}$, tirées des équations (1) et (2) du n° 34, les deux membres, après cette substitution, devant être identiques quels que soient X, X_1, X_2, l'on obtient les trois équations

$$(4)\begin{cases} \frac{1}{P_0} = -\frac{\cot\varphi\frac{d\sigma^2}{ds^2}}{R} + \frac{\frac{d\sigma_1^2}{ds^2}}{R_1\sin\varphi} \\ \qquad + \left(\frac{1}{L\sin\varphi} - \frac{\cot\varphi}{L_1}\right)\frac{d\sigma}{ds}\frac{d\sigma_1}{ds_1} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)\frac{d\sigma}{ds}, \\ \frac{1}{P_1} = \frac{\frac{d\sigma^2}{ds^2}}{R_1\sin\varphi} - \frac{\cot\varphi\frac{d\sigma_1^2}{ds^2}}{R_1} \\ \qquad + \left(-\frac{\cot\varphi}{L} + \frac{1}{L_1\sin\varphi}\right)\frac{d\sigma}{ds}\frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{1}{d\sigma_1}\left(\frac{d\sigma_1}{ds}\right)\frac{d\sigma_1}{ds}, \\ \frac{1}{p} = \frac{\frac{d\sigma^2}{ds^2}}{r} + \frac{\frac{d\sigma_1^2}{ds^2}}{r_1} + 2\frac{\frac{d\sigma}{ds}\frac{d\sigma_1}{ds}}{l}. \end{cases}$$

Ces équations donnent les trois composantes de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{P}}$ de la courbe ds, suivant les deux courbes coordonnées $d\sigma$, $d\sigma_1$ et la normale à la surface.

46. *De la composante tangentielle de la courbure* $\frac{1}{\mathfrak{P}}$. — Cette composante, que nous représentons par $\frac{1}{P}$, est la projection orthogonale de la courbure propre de la courbe ds sur le plan tangent à la surface F. Pour l'obtenir, il suffit de multiplier la courbure $\frac{1}{P_1}$ par $\cos\varphi$, et d'ajouter la courbure $\frac{1}{P_0}$; on trouve ainsi la composante orthogonale de la courbure $\frac{1}{P}$ suivant l'élément $d\sigma$; on a donc

$$\frac{\cos(P, d\sigma)}{P} = \frac{\sin\varphi}{R_1}\frac{d\sigma_1^2}{ds^2} + \frac{\sin\varphi}{L}\frac{d\sigma}{ds}\frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)\frac{d\sigma}{ds} + \cos\varphi\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{d\sigma_1}{ds}\right)\frac{d\sigma_1}{ds}.$$

or, remarquons que $\cos(P, d\sigma)$ est égal à $\sin\alpha$, et si l'on différentie par rapport à ds la dernière des équations (1) divisée par ds, on trouve que les deux derniers termes de l'équation précédente se réduisent à $\sin\alpha\,\frac{d\beta}{ds}$, $d\beta$ étant une différentielle complète; on obtient ainsi la valeur de $\frac{1}{P}$ sous l'une des deux formes

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{P} &= \frac{\sin\alpha}{R_1} + \frac{\sin\beta}{L} + \sin\varphi\,\frac{d\beta}{ds},\\ -\frac{\sin\varphi}{P} &= \frac{\sin\beta}{R} + \frac{\sin\alpha}{L_1} + \sin\varphi\,\frac{d\alpha}{ds},\end{aligned}\right.$$

cette dernière s'obtenant directement, en prenant la composante $\frac{1}{P}$ suivant l'élément $d\sigma_1$.

Ces formules sont d'une grande simplicité; elles font connaître la composante tangentielle de la courbure de la courbe proposée en fonction des composantes tangentielles des courbures propres et inclinées des lignes coordonnées, et de la variation totale de l'angle que l'élément de cette courbe fait avec les deux lignes coordonnées.

47. *Composante tangentielle de l'angle de contingence de la courbe ds.* — Si, dans les deux formules précédentes, on remplace les sinus par les arcs qui leur sont proportionnels (1), et qu'on introduise les angles de contingence propre ou inclinée, l'on aura

$$(5')\qquad \frac{ds}{P} = I_1 + J + d\beta,\qquad -\frac{ds}{P} = I + J_1 + d\alpha,$$

dans lesquelles $d\alpha$, $d\beta$ sont les différentielles totales des angles α et β par rapport à ρ et à ρ_1.

Ces formules donnent la projection tangentielle $\frac{ds}{P}$ de l'angle de contingence de la courbe ds, en fonction des projections tangentielles des angles de contingence propre et inclinée des lignes coordonnées.

Si l'on remarque que φ est la somme des angles α et β, et

que l'on élimine des deux équations (5') les angles J et J_1, au moyen des relations contenues dans le type (5) du Chapitre II, ces deux équations se condensent en une seule, qui est

$$(5'') \qquad \frac{ds}{P} = I_1 - I + d_{\rho_1}\beta - d_\rho\alpha.$$

De là résulte que l'on peut aussi écrire cette équation sous l'une des deux formes

$$(6) \qquad \begin{cases} d\alpha = I_1 - I - \dfrac{ds}{P} + d_1\varphi, \\ d\beta = I - I_1 + \dfrac{ds}{P} + d_0\varphi, \end{cases}$$

lesquelles font connaître les variations complètes des angles α et β que la courbe s fait avec les deux lignes coordonnées.

On peut aussi exprimer l'angle de contingence $\frac{ds}{P}$ en fonction des projections tangentielles des angles de contingence inclinée des lignes coordonnées, en éliminant I et I_1 de la formule (5'') au moyen des relations (5) du Chapitre II. On obtient ainsi

$$(5''') \qquad \frac{ds}{P} = J - J_1 + d_0\beta - d_1\alpha \quad (1).$$

De même on peut exprimer les variations totales $d\alpha$, $d\beta$ au moyen des mêmes angles de contingence

$$(6'') \quad d\alpha = J - J_1 + d_0\varphi - \frac{ds}{P}, \quad d\beta = J_1 - J + d_1\varphi + \frac{ds}{P}.$$

Il est inutile de remarquer que si, dans toutes ces formules, on remplace les angles de contingence par le rapport de l'élément de l'arc au rayon de courbure correspondant, et qu'on substitue aux arcs les sinus opposés qui leur sont proportionnels (1), toutes les formules trouvées dans le présent numéro se rapporteront aux courbures. Elles ne seront autre chose que des transformations des formules (5) de ce Chapitre au moyen des équations contenues dans le premier des deux types (5) du Chapitre II.

48. *Construction du rayon tangentiel de courbure.* — Appelons $\frac{1}{L_1^{(\beta)}}$ la projection tangentielle de la courbure inclinée de la courbe σ_1 sous l'angle β; $\frac{1}{L^{(\alpha)}}$ la projection tangentielle de la courbure inclinée de la courbe σ sous l'angle α : on a les relations

$$-d_1\beta = \frac{d\sigma_1}{R_1} + \frac{d\sigma_1}{L_1^{(\beta)}}, \quad -d_1\alpha = \frac{d\sigma}{R} + \frac{d\sigma}{L^{(\alpha)}}.$$

D'après cela, l'équation (5″) deviendra, en remplaçant les arcs par les sinus proportionnels (1),

$$\frac{\sin\varphi}{P} = \frac{\sin\beta}{L^{(\alpha)}} - \frac{\sin\alpha}{L_1^{(\beta)}}.$$

De là résulte que les extrémités des trois rayons P, $L_1^{(\beta)}$, $L^{(\alpha)}$ sont en ligne droite si, à partir du point considéré, on porte ces trois rayons dans la direction de ds, $d\sigma_1$, $d\sigma$.

De même appelons $T_{(\alpha)}$, $T_{(\beta)}$ les rayons correspondants aux projections tangentielles des courbures inclinées de la courbe ds, la première sous l'angle α, et la seconde sous l'angle β : on a les relations

$$-d\alpha = \frac{ds}{P} + \frac{ds}{T_{(\alpha)}}, \quad d\beta = \frac{ds}{P} - \frac{ds}{T_{(\beta)}},$$

dans lesquelles $d\alpha$, $d\beta$ sont des différentielles complètes; d'après cela, les équations (5) deviendront

$$\frac{\sin\varphi}{T_{(\beta)}} = \frac{\sin\alpha}{R_1} + \frac{\sin\beta}{L}, \quad \frac{\sin\varphi}{T_{(\alpha)}} = \frac{\sin\beta}{R} + \frac{\sin\alpha}{L_1}.$$

Donc les extrémités des trois rayons $T_{(\beta)}$, R_1, L sont en ligne droite, ainsi que les extrémités des trois rayons $T_{(\alpha)}$, L_1, R, pourvu que ces rayons soient portés, à partir du point considéré, dans la direction des éléments ds, $d\sigma_1$, $d\sigma$.

Il résulte de ce qui précède que si les trois courbes quelconques ds, $d\sigma$, $d\sigma_1$, passant par un même point, font entre elles deux à deux des angles fonctions des coordonnées de ce point, le rayon correspondant à la projection tangentielle de

la courbure propre d'une des trois courbes *ds* et les rayons correspondants aux projections tangentielles des courbures inclinées suivant les deux autres courbes ont leurs extrémités situées sur une ligne droite, si l'on porte ces rayons, à partir de ce point, dans la direction des éléments $ds, d\sigma, d\sigma_1$. Ceci démontre que lorsque deux des trois rayons sont connus, le troisième se trouve géométriquement déterminé.

C'est le lieu de remarquer ici que si la courbe *ds* coupe la courbe coordonnée $d\sigma$ sous un angle α constant, la seconde des équations (5) démontre que les extrémités des rayons P, R, L_1 sont en ligne droite, et que si, l'angle des lignes coordonnées étant constant, la même courbe coupe les lignes coordonnées de la série (σ) sous un angle aussi constant, les extrémités des rayons de courbure P, R, R_1 de la courbe et des lignes coordonnées sont en ligne droite, pourvu que dans les deux cas les rayons soient portés dans la direction des éléments $ds, d\sigma_1, d\sigma$.

49. *Composante tangentielle de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{P}}$ en fonction des variations des arcs coordonnés.* — Multiplions les deux membres de l'équation ($5'''$) par $d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi$; on trouve, en ordonnant et en ayant égard aux relations (1), ainsi qu'aux valeurs de J et de J_1 [(9), Chapitre II],

$$d\sigma\, d\sigma_1 \frac{ds}{P} \sin\varphi = d_1\, d\sigma(d\sigma + \cos\varphi\, d\sigma_1) - d_0\, d\sigma_1(d\sigma_1 + \cos\varphi\, d\sigma) + ds(d\sigma_1 \sin\beta\, d_0\beta - d\sigma \sin\alpha\, d_1\alpha).$$

Or si l'on remplace dans le second membre les facteurs de $d_1\, d\sigma$, $d_0\, d\sigma_1$ par leurs valeurs $ds\cos\alpha$, $ds\cos\beta$ (1), et qu'on groupe les termes dépendants de α, ainsi que les termes dépendants de β, on trouve l'équation suivante :

$$(7) \qquad \frac{d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi}{P} = d_1(d\sigma\cos\alpha) - d_0(d\sigma_1\cos\beta),$$

qui est aussi simple que significative. Si l'on représente par $d\nu, d\nu_1$ les projections des éléments $d\sigma, d\sigma_1$ sur la direction de la courbe *ds*, elle prend la forme

$$\frac{1}{P} = \frac{d_1(d\nu) - d_0(d\nu_1)}{d\omega}.$$

On obtient ainsi ce théorème nouveau :

La courbure tangentielle d'une courbe quelconque tracée sur une surface est le rapport de la différence des variations des projections des arcs élémentaires coordonnés sur la direction de la courbe à l'élément de surface.

L'équation (7) peut être obtenue d'une autre manière, indépendante de l'équation (5)'''. En effet, si l'on applique la formule (10) du Chapitre II à l'arc ds et à l'arc $d\sigma$, le déplacement par rapport au premier étant complet et correspondant à la variation d, et le déplacement par rapport au second étant partiel et correspondant à la variation d_0, on obtient

$$-\frac{ds\, d\sigma_1 \sin\alpha}{P} = d_0\, ds - d\,(d\sigma \cos\alpha).$$

Si l'on remarque que l'on a

$$ds = d\sigma \cos\alpha + d\sigma_1 \cos\beta, \quad d = d_0 + d_1,$$

on retombe sans aucun détour sur l'équation (7).

50. *De la composante normale de la courbure* $\frac{1}{\varphi}$. — La troisième des équations (4) donne la composante de la courbure $\frac{1}{\varphi}$ de la courbe ds suivant le plan normal à la surface F mené selon l'élément ds. Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(8) \qquad \frac{ds^2}{p} = \frac{d\sigma^2}{r} + \frac{d\sigma_1^2}{r_1} + 2\frac{d\sigma\, d\sigma_1}{l},$$

ou bien, si l'on remplace les arcs par les sinus proportionnels (1), sous la forme

$$(8') \qquad \frac{\sin^2\varphi}{p} = \frac{\sin^2\beta}{r} + \frac{\sin^2\alpha}{r_1} + 2\frac{\sin\alpha \sin\beta}{l}.$$

Si l'on introduit les angles de contingence correspondants aux courbures $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{l_1}$, on obtient

$$(8'') \qquad \frac{ds}{p} \sin\varphi = (i + j_1) \sin\beta + (i_1 + j) \sin\alpha,$$

avec cette condition qui résulte de la relation (7) du Chapitre II :

$$(9) \qquad j_1 \sin\beta = j \sin\alpha,$$

L'équation (8″) montre que si l'on prend, à partir du point considéré sur la surface et dans la direction des trois éléments ds, $d\sigma$ et $d\sigma_1$, des longueurs inversement proportionnelles à $\frac{ds}{p}$, $i + j_1$, $i_1 + j$, les extrémités de ces longueurs seront en ligne droite.

Or, comme l'équation (8) peut encore s'écrire sous les deux formes suivantes

$$\frac{ds}{p} \sin\varphi = i \sin\beta + (i_1 + 2j) \sin\alpha,$$

$$\frac{ds}{p} \sin\varphi = (i + 2j_1) \sin\beta + i_1 \sin\alpha,$$

on en déduira des théorèmes analogues.

51. *Plan osculateur.* — Rapportons la position du plan osculateur de la courbe ds au point considéré aux trois directions $d\sigma$, $d\sigma_1$ et la normale n. Ce plan passe par l'élément ds qui fait avec les arcs coordonnés $d\sigma$, $d\sigma_1$ les angles α et β; il suffit donc de connaître l'angle que la normale N à ce plan fait avec la normale n à la surface; or cet angle est le même que celui des deux rayons P et $\mathfrak{P}$. On aura donc $\operatorname{tang}(N, n) = \frac{P}{p}$, et comme les deux composantes $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{P}$ sont connues d'après les formules des numéros qui précèdent, la position du plan osculateur sera déterminée.

Écrivons les expressions des cosinus des angles que la normale N fait avec les directions n, $d\sigma$, $d\sigma_1$. Si l'on remarque que l'on a

$$\frac{1}{\mathfrak{P}^2} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{p^2},$$

ces expressions sont

$$(10)\quad \begin{cases} \cos(N, n) = \dfrac{\mathfrak{P}}{P}, \\ \cos(N, d\sigma) = \dfrac{\mathfrak{P}}{p}\sin\alpha, \\ \cos(N, d\sigma_1) = -\dfrac{\mathfrak{P}}{p}\sin\beta. \end{cases}$$

Les cosinus des angles que cette normale N fait avec les trois axes coordonnés s'en déduisent sans difficulté, car, si l'on fait faire, dans son plan, un quart de révolution au triangle dont les côtés sont $\frac{1}{\mathfrak{P}}$, $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{p}$ et qu'on projette le périmètre sur l'axe des z, on obtient

$$\frac{\cos(N, z)}{\mathfrak{P}} = Z\frac{\cos\beta}{p\sin\varphi} - Z_1\frac{\cos\alpha}{p\sin\varphi} + Z_2\left(\frac{\sin\alpha}{P_0} - \frac{\sin\beta}{P_1}\right) \quad [3].$$

52. *Étant donnée l'équation de la courbe ds, calculer tous les éléments de cette courbe.* — Soit l'équation de la courbe ds

$$u = \psi(\rho, \rho_1) = \text{const.}$$

On a

$$(11)\quad \frac{du}{d\rho}d\rho + \frac{du}{d\rho_1}d\rho_1 = 0.$$

Longueur de l'élément ds. — Si l'on pose, pour abréger,

$$K^2 = H^2\frac{du^2}{d\rho_1^2} + H_1^2\frac{du^2}{d\rho^2} - 2G^2\frac{du}{d\rho}\frac{du}{d\rho_1},$$

on a

$$(12)\quad \frac{ds}{K} = \frac{d\rho}{\dfrac{du}{d\rho_1}} = -\frac{d\rho_1}{\dfrac{du}{d\rho}}.$$

Direction de l'élément. — Si l'on fait usage des équations (1) du présent Chapitre, en ayant égard aux expressions trouvées

dans le n° 31, on trouve

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{K}{(H^2H_1^2-G^4)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\dfrac{du}{d\rho_1}}{H_1\sin\beta}=-\frac{\dfrac{du}{d\rho}}{H\sin\alpha},\\
&H\cos\alpha=\frac{H^2}{K}\frac{du}{d\rho_1}-\frac{G^2}{K}\frac{du}{d\rho},\\
&H_1\cos\beta=-\frac{H_1^2}{K}\frac{du}{d\rho}+\frac{G^2}{K}\frac{du}{d\rho_1}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules font connaître les angles α, β que l'élément ds fait avec les lignes coordonnées.

Variation de l'angle des lignes coordonnées. — On a

$$\cos\varphi=\frac{G^2}{HH_1};$$

on en déduit

$$-\sqrt{1-\frac{G^4}{H^2H_1^2}}=\frac{\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{G^2}{HH_1}\right)}{\dfrac{d\varphi}{d\rho}}=\frac{\dfrac{d}{d\rho_1}\left(\dfrac{G^2}{HH_1}\right)}{\dfrac{d\varphi}{d\rho_1}}.$$

Ces formules donnent les variations de l'angle φ par rapport à chacun des paramètres ρ, ρ_1.

Composante tangentielle de la courbure. — On trouve

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{(H^2H_1^2-G^4)^{\frac{1}{2}}}{P}&=\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{H^2}{K}\frac{du}{d\rho_1}-\frac{G^2}{K}\frac{du}{d\rho}\right)\\
&+\frac{d}{d\rho}\left(\frac{H_1^2}{K}\frac{du}{d\rho}-\frac{G^2}{K}\frac{du}{d\rho_1}\right),
\end{aligned}\right.$$

et, si l'on développe les différentiations, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{(H^2H_1^2-G^4)^{\frac{1}{2}}}{P}&=\frac{du}{d\rho_1}\left[\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{H^2}{K}\right)-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{G^2}{K}\right)\right]\\
&+\frac{du}{d\rho}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{H_1^2}{K}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{G^2}{K}\right)\right]\\
&+\frac{H^2}{K}\frac{d^2u}{d\rho_1^2}+\frac{H_1^2}{K}\frac{d^2u}{d\rho^2}-2\frac{G^2}{K}\frac{d^2u}{d\rho\,d\rho_1}.
\end{aligned}$$

Composante normale de la courbure. — On trouvera, en se servant de la formule (8), l'expression suivante

$$(15)\qquad \frac{K^2}{p} = \frac{H^2}{r}\frac{du^2}{d\rho_1^2} + \frac{H_1^2}{r_1}\frac{du^2}{d\rho^2} - 2\frac{HH_1}{l}\frac{du}{d\rho}\frac{du}{d\rho_1}.$$

Mais dans cette expression les courbures normales, propres ou inclinées, des lignes coordonnées ne peuvent pas, comme dans les courbures tangentielles de ces lignes, s'exprimer exclusivement en fonction des paramètres différentiels du premier ordre H, H_1, G et de leurs variations : il faut les calculer directement. Représentons par a, b, c, a_1, b_1, c_1 les dérivées de x, y, z par rapport à ρ et ρ_1 : on trouve sans difficulté les trois formules suivantes

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \sum \frac{da}{d\rho}\frac{(bc_1 - cb_1)}{H^2(H^2H_1^2 - G^4)^{\frac{1}{2}}},\\ \frac{1}{r_1} &= \sum \frac{da_1}{d\rho_1}\frac{(bc_1 - cb_1)}{H_1^2(HH_1^2 - G^4)^{\frac{1}{2}}},\\ \frac{1}{l} &= \sum \frac{da}{d\rho_1}\frac{(bc_1 - cb_1)}{HH_1(H^2H_1^2 - G^4)^{\frac{1}{2}}};\end{aligned}\right.$$

et en portant ces valeurs dans l'expression de $\frac{1}{p}$, écrite ci-dessus, on aura la courbure normale de la courbe ds.

53. *Transformation des courbes tracées sur deux surfaces différentes.* — Considérons une seconde surface F', sur laquelle se trouve tracé un réseau de lignes coordonnées ρ', ρ'_1, et soit une courbe $u' = \psi'(\rho', \rho'_1) = 0$ décrite sur cette surface. Si les nouveaux paramètres différentiels H', H'_1, G' se composent par rapport aux coordonnées ρ', ρ'_1 de la même manière que les anciens paramètres différentiels se composaient par rapport aux coordonnées ρ, ρ_1, et si, de plus, l'équation de la seconde courbe par rapport aux nouvelles coordonnées est la même que l'équation de la première courbe par rapport aux anciennes, on voit que l'élément de l'arc de cette seconde courbe, sa direction par rapport aux arcs coordonnés, l'élément de surface, la courbure tangentielle, seront exprimés

par des fonctions des nouvelles coordonnées identiques à celles qui expriment les mêmes éléments de la première courbe au moyen des anciennes coordonnées. Mais, par les raisons données à la fin du numéro précédent, il pourra en être autrement de la composante normale de la courbure de cette seconde courbe, parce que cet élément dépend d'autres grandeurs que les paramètres différentiels du premier ordre H', H'_1, G' et l'équation ψ' de la courbe. L'identité de composition analytique des éléments dont nous venons de parler entraînera des propriétés géométriques sinon égales, puisque les deux systèmes de coordonnées peuvent être diversement composés au point de vue géométrique, du moins jouissant d'une certaine analogie qu'il sera possible d'exprimer géométriquement dans chaque cas particulier. Ainsi, lorsque la courbe u sera rectifiable, il en sera de même de la courbe u'; si l'aire de la surface limitée par la première courbe et les lignes coordonnées extrêmes est carrable, il en sera de même de l'aire de la seconde surface, limitée par la seconde courbe et ses lignes coordonnées correspondantes. Les propriétés descriptives de la première courbe appartiendront aussi à la seconde, et ainsi de suite.

Il existe un cas très-général dans lequel les conditions précédentes sont remplies : c'est lorsque les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre. On verra plus loin qu'alors, bien que les surfaces F et F′ soient différentes, les paramètres différentiels H, H_1, G, H', H'_1 G' n'ont pas seulement la même composition chacun à chacun, mais qu'ils restent les mêmes, puisque les deux systèmes de coordonnées sont identiques dans les deux cas. Il suffit donc, dans ce cas, que les deux équations ψ et ψ' des deux courbes soient les mêmes pour que l'on doive tirer les conclusions que nous venons d'indiquer.



CHAPITRE V.

DE LA COURBURE DES SURFACES.

---

54. ***Objet du Chapitre.*** — **L'équation générale que nous venons d'établir sur la composition de la courbure normale à la surface d'une courbe quelconque en fonction de courbures normales des lignes coordonnées, n'est pas seulement propre à l'étude de la courbure de cette courbe, elle renferme toute la théorie de la courbure des surfaces sans restriction aucune. L'objet de ce Chapitre est consacré à développer toutes les particularités de cette théorie, comme conséquences de l'équation indiquée.**

Courbure d'une section droite normale à la surface. — **Menons un plan perpendiculaire à la surface suivant l'élément ds, la courbure de la section ainsi obtenue au point considéré est la projection de la courbure de la courbe ds sur ce plan normal, d'après le théorème établi au n° 23. Donc l'équation (8′) du n° 50 fait connaître la courbure d'une section normale en fonction : 1° des angles que le plan de cette section forme avec les plans normaux à la surface menés par les éléments des lignes coordonnées ; 2° des courbures normales des deux sections interceptées par ces deux plans ; 3° d'une certaine courbure composée que nous avons appelée *composante normale* de la courbure inclinée de l'une des deux lignes coordonnées par rapport à l'autre, mais que l'on peut aussi définir, comme cela doit-être, indépendamment des lignes coordonnées, et seulement par la considération des sections normales, comme on le démontrera plus bas ; cette équation que nous transcrivons ici**

$$(1)\qquad \frac{\sin^2\varphi}{p} = \frac{\sin^2\beta}{r} + \frac{\sin^2\alpha}{r_1} + \frac{2\sin\alpha\sin\beta}{l}$$

fait donc connaître $\frac{1}{p}$, au moyen des cinq éléments, α, β, r, r_1 et l.

55. *Représentation géométrique des rayons de courbure des diverses sections normales à la surface autour d'un point.* — Si, à partir du point considéré sur la surface, on prend sur la tangente à chaque section normale suivant ds, qui est supposé faire tous les angles possibles avec les arcs coordonnés $d\sigma$, $d\sigma_1$, une longueur proportionnelle à la racine carrée du rayon de courbure correspondant, l'équation précédente devient alors celle d'une conique située dans le plan tangent rapportée à un rayon vecteur issu du centre, et aux angles que ce rayon forme avec deux directions $d\sigma$, $d\sigma_1$. Ainsi cette longueur décrira une conique située dans le plan tangent, ayant son centre au point considéré. Les rayons vecteurs de cette courbe auxiliaire feront connaître les rayons de courbure des sections normales faites suivant ces rayons vecteurs. De là résulte :

1° Qu'il y a deux directions de ds, rectangulaires entre elles, qui correspondent, l'une à un rayon de courbure maximum, et l'autre à un rayon de courbure minimum parmi tous ceux des sections normales : ces rayons de courbure sont appelés *principaux;*

2° Que toutes les relations qui existent entre les carrés des demi-diamètres de la conique formant certains angles entre eux, existent pour les rayons de courbure des sections normales correspondantes à ces demi-diamètres;

3° Que si les deux courbes coordonnées $d\sigma$, $d\sigma_1$ sont tangentes à deux demi-diamètres conjugués de la conique, le double produit $\sin\alpha\sin\beta$ n'entrera pas dans l'équation polaire de la conique; donc les composantes normales des courbures inclinées sont nulles pour deux directions conjuguées de $d\sigma$, $d\sigma_1$.

-*Discussion des rayons de courbure des sections normales.* — Cette discussion est ramenée à la discussion des carrés des diamètres de la conique auxiliaire; il y a trois cas à distinguer suivant que le binôme $\frac{1}{rr_1} - \frac{1}{l^2}$ est supérieur, inférieur ou égal à zéro.

1° Si ce binôme est supérieur à zéro, la conique auxiliaire est une ellipse : donc tous les rayons de courbure ont le même signe, toute section de la surface est toujours convexe dans le même sens.

2° Si le même binôme est inférieur à zéro, la conique auxiliaire est une hyperbole; mais ici il y a à considérer les rayons vecteurs réels et les rayons vecteurs imaginaires, puisque les rayons de courbure, devant être proportionnels aux carrés de ces rayons vecteurs, seront réels dans les deux cas.

Or, si l'on construit l'hyperbole conjuguée de l'hyperbole réelle, et qu'on multiplie par $\sqrt{-1}$ les demi-diamètres de cette hyperbole conjuguée, on aura les valeurs imaginaires des demi-diamètres de la conique auxiliaire. Donc les carrés des demi-diamètres de l'hyperbole conjuguée représenteront les rayons de courbure correspondants, considérés comme négatifs. D'après cela, les directions des asymptotes donneront des directions pour lesquelles les rayons de courbure des sections normales seront infinis, et elles partageront le plan tangent en quatre régions; la surface sera convexe pour deux régions opposées, et concave pour les deux autres régions; les directions des rayons principaux seront les bissectrices des angles des asymptotes.

3° Si le binôme est nul, l'équation représente deux droites parallèles rapportées à une origine située à égale distance de ces droites. Donc tous les rayons de courbure seront de même signe, il y aura une direction unique, celle qui est parallèle à chacune de ces droites, pour laquelle le rayon de courbure sera infini : ce sera un rayon de courbure maximum; la direction perpendiculaire donnera le rayon de courbure minimum. Ce caractère appartient aux surfaces développables.

Il y a à considérer le cas où la conique auxiliaire devient un cercle, alors les rayons de courbure des diverses sections normales sont égaux; on dit alors que le point de la surface pour lequel se présente cette particularité est un *ombilic;* les conditions analytiques correspondantes à ce cas sont

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1},\quad \frac{1}{l}=0.$$

56. *Différentes formes de l'équation* (1). — Elles résultent de ce que nous venons d'établir dans le numéro précédent :

1° Si les lignes coordonnées $d\sigma$, $d\sigma_1$ sont tangentes aux axes de l'ellipse auxiliaire, en appelant ϖ_0, ϖ_1 les rayons principaux

de courbure, cette équation devient

$$\frac{1}{p} = \frac{\cos^2\alpha}{\varpi_0} + \frac{\sin^2\alpha}{\varpi_1},$$

c'est la formule d'Euler.

2° Si les lignes coordonnées sont tangentes à deux diamètres conjugués de l'ellipse auxiliaire, on obtient l'équation

$$\frac{\sin^2\varphi}{p} = \frac{\sin^2\beta}{r} + \frac{\sin^2\alpha}{r_1}.$$

3° Si le système est rectangulaire, l'équation devient

$$\frac{1}{p} = \frac{\cos^2\alpha}{r} + \frac{\sin^2\alpha}{r_1} + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{l},$$

dans laquelle p, r, r_1 sont les rayons de courbure des sections normales faites suivant les angles correspondants; l a aussi une signification géométrique indépendante du système coordonné.

En effet, lorsque le système des coordonnées est orthogonal, la projection normale de l'angle de contingence inclinée δ est un angle égal à l'angle du plan normal à la surface suivant $d\sigma$ et de la normale infiniment voisine, menés par les extrémités de cet élément, puisque les éléments de ces deux angles sont perpendiculaires chacun à chacun; or le rapport de ce dernier angle à l'élément $d\sigma$ est appelé ***seconde courbure géodésique*** de l'arc $d\sigma$; d'ailleurs la direction de l'arc de cercle infiniment petit qui mesure le premier de ces deux angles égaux est celle de la normale à la surface; donc la composante normale de la courbure inclinée de l'arc $d\sigma$ est égale à la seconde courbure géodésique de cet élément, lorsque l'angle des coordonnées est droit.

4° Il faut conclure de ce que nous venons de dire, et du théorème démontré au n° **28**, sur l'égalité des composantes normales (7) de deux courbures inclinées des deux arcs d'un système coordonné, que les secondes courbures géodésiques de deux directions rectangulaires tracées sur la surface sont égales entre elles, de sorte que, si l'on appelle $\frac{1}{\psi}$, $\frac{1}{\psi_1}$ ces deux courbures, l'on a $\frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi_1}$.

57. ***Relations entre les composantes normales des courbures inclinées des deux systèmes différents.*** — Chaque système de lignes coordonnées tracées sur une surface détermine deux courbures inclinées ayant l'une et l'autre même composante normale à la surface. Cette composante, pour une même surface, varie d'un système à l'autre; nous nous proposons de trouver les relations qui existent entre les composantes inclinées de deux systèmes différents.

Soient ds, ds_1 les arcs coordonnés du nouveau système, le premier arc faisant les angles α, β, le second les angles α_1, β_1 avec les arcs $d\sigma$, $d\sigma_1$ du premier système. Soit p_1 le rayon de courbure de la section normale à la surface suivant ds_1, on aura, n° 54, formule (1),

$$\frac{\sin^2\varphi}{p_1} = \frac{\sin^2\beta_1}{r} + \frac{\sin^2\alpha_1}{r_1} + \frac{2\sin\alpha_1\sin\beta_1}{l}.$$

Or, si l'on rapporte $d\sigma$ au système ds, ds_1 et qu'on représente par $\frac{1}{\lambda}$ la composante normale de la courbure inclinée du nouveau système, θ étant l'angle des éléments ds, ds_1, on aura

$$\frac{\sin^2\theta}{r} = \frac{\sin^2\alpha_1}{p} + \frac{\sin^2\alpha}{p_1} - \frac{2\sin\alpha\sin\alpha_1}{\lambda};$$

si l'on élimine p et p_1 de cette dernière équation au moyen de la précédente et de l'équation (1), on trouve

$$(2)\quad \frac{\sin^2\varphi}{\lambda} = \frac{\sin\beta\sin\beta_1}{r} + \frac{\sin\alpha\sin\alpha_1}{r} + \frac{\sin\alpha_1\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta_1}{l},$$

laquelle donne la composante normale de la courbe inclinée d'un système de coordonnées ds, ds_1 en fonction des composantes normales des courbures propres et des courbures inclinées du système $d\sigma$, $d\sigma_1$.

58. ***Expression de la seconde courbure géodésique d'une courbe ds.*** — Si, dans l'équation précédente, l'on suppose les courbes ds, ds_1 rectangulaires entre elles, on a les conditions

$$\alpha_1 - \alpha = \beta - \beta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 = \varphi;$$

de plus, d'après ce qui a été établi au n° 56, la composante normale $\frac{1}{\lambda}$ de la courbure inclinée devient la seconde courbure géodésique de la courbe *ds*. Si l'on représente par $\frac{1}{V}$ cette courbure, l'on aura

$$(2')\qquad \frac{\sin^2\varphi}{V} = \frac{\sin 2\beta}{2r} - \frac{\sin 2\alpha}{2r_1} + \frac{\sin(\alpha-\beta)}{l}.$$

Si, dans cette formule, on élimine les cosinus de α et de β au moyen des deux dernières équations (1) du n° 44, dans lesquelles on aura remplacé les arcs par les sinus proportionnels, l'on aura

$$(2'')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin^3\varphi}{V} &= \sin^2\beta\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r}\right) \\ &\quad + \sin\alpha\sin\beta\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) - \sin^2\alpha\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r_1}\right). \end{aligned}\right.$$

Si le premier système $d\sigma$, $d\sigma_1$ est aussi rectangulaire, $\frac{1}{l}$ devient la seconde courbure géodésique $\frac{1}{\wp}$ de l'une des deux courbes du système, et, comme les deux angles α et β sont alors complémentaires, on obtient

$$(2''')\qquad \frac{1}{V} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{\cos 2\alpha}{\wp}.$$

Si enfin l'on suppose que le second système est tel, que les lignes $d\sigma$, $d\sigma_1$ sont tangentes aux deux sections principales, $\frac{1}{\wp}$ devient nul, et l'on retrouve la formule de M. Bertrand :

$$\frac{1}{V} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\frac{1}{\varpi_0} - \frac{1}{\varpi_1}\right).$$

Relation entre les courbures $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{V}$ d'une ligne ds. — Si l'on cherche la variation de la courbure $\frac{1}{p}$ lorsque l'élément *ds*

prend toutes les positions possibles en tournant, dans le plan tangent, autour du point que l'on considère, on trouve, pour l'expression de cette variation, en remarquant que $d\alpha = -d\beta$, le second membre de l'équation (2') multiplié par 2; donc

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{2}{V} = 0.$$

Si l'on prend la variation de $\frac{1}{V}$ donnée par la formule (2'), on trouve

$$\sin^2\varphi \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{V}\right) = -\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{r} - \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{r_1} + \frac{\cos(\alpha-\beta)}{l};$$

or, si l'on appelle $\frac{1}{p_r}$ la courbure de la section normale faite suivant son élément ds_r perpendiculaire à ds, on a

$$\sin^2\varphi \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{V}\right) = \frac{\sin^2\varphi}{p} + \frac{\sin^2\varphi}{p_r},$$

ce qui donne

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{V}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_r} = \frac{1}{\varpi_0} + \frac{1}{\varpi_1};$$

de là résulte que l'on a successivement

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{p}\right) + 2\left(\frac{1}{\varpi_0} + \frac{1}{\varpi_1}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{V}\right) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{p_r}\right) = -\frac{2}{V} - \frac{2}{V_1};$$

or l'on a $\frac{1}{V} + \frac{1}{V_1}$ nul, donc on obtient

$$\frac{d^3}{d\alpha^3}\left(\frac{1}{p}\right) = 0.$$

59. *Expression de la composante normale de la courbure inclinée.* — La composante normale de la courbure inclinée d'un système de lignes coordonnées est un élément important

dans la théorie des surfaces; nous allons montrer que cette composante qui, dans chaque système, a une traduction simple qui permet d'en calculer facilement l'expression analytique, a aussi, comme nous l'avons annoncé, n° 54, une signification indépendante de tout système; et que cette composante ne dépend que de la courbure de la section normale, suivant l'une des lignes coordonnées, et de la seconde courbure géodésique de cette ligne.

Si, dans la formule (2), on élimine α_1, β_1 au moyen des relations $\beta_1 = \beta - \theta$, $\alpha_1 = \theta + \alpha$, et qu'on ordonne le résultat suivant $\cos\theta$, $\sin\theta$, l'on trouve, en ayant égard aux formules (1) et (2′), la formule simple

$$(3) \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{\cos\theta}{p} + \frac{\sin\theta}{V}.$$

On trouvera de la même manière pour l'arc ds_1, en représentant par $\frac{1}{V_1}$ la seconde courbure géodésique de cet arc, la formule analogue

$$(3') \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{\cos\theta}{p_1} - \frac{\sin\theta}{V_1},$$

desquelles on déduit par addition

$$(3'') \qquad \frac{2}{\lambda} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right)\cos\theta + \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_1}\right)\sin\theta \quad (*).$$

Ces diverses expressions montrent la différence essentielle qui existe entre la composante normale de la courbure inclinée d'une des lignes coordonnées d'un système et la deuxième courbure géodésique de cette ligne. Ces deux courbures sont toujours distinctes l'une de l'autre, à moins que le système des lignes coordonnées ne soit rectangulaire. C'est

---

(*) Les formules (3) et les suivantes ont été publiées par nous en 1864 dans notre Mémoire sur la courbure des surfaces inséré dans le tome VI de la *Revue des Sociétés savantes*. *Voyez* p. 411, formules (12), (12′), (12″). Nous faisons cette remarque parce qu'un savant géomètre, qui sans doute ignorait notre travail, a publié ces formules dans un *Mémoire sur les lignes tracées sur les surfaces*, § IV, p. 15, imprimé en 1868.

dans ce cas seulement qu'elles sont égales entre elles. Mais la propriété principale des équations précédentes est de donner, de la composante normale de la courbure inclinée, une signification indépendante de tout système.

Si l'on suppose que l'une des deux courbes ds du système ds, ds_1 est fixe, et que la seconde forme avec la première tous les angles possibles dans la formule (3), p et V étant alors invariables, le rayon λ de la courbure inclinée projetée sur le plan normal à la courbe suivant ds_1 variera comme le rayon vecteur d'une ligne droite déterminée de position et située à une distance de l'origine égale à la racine carrée de l'expression $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{V_2}$.

Il est bon de remarquer que l'on peut obtenir la valeur de la courbure $\frac{1}{\lambda}$ en fonction des courbures propres et des secondes courbures géodésiques des lignes coordonnées d'un même système, indépendamment de l'angle qu'elles forment entre elles : il suffit d'éliminer θ entre les deux équations (3) et (3'); on obtient ainsi

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\left(\frac{1}{Vp_1}+\frac{1}{V_1 p}\right)^2}{\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}\right)^2+\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V}\right)^2}.$$

Ces différentes valeurs de la composante normale de la courbure inclinée montrent que cette composante peut être nulle sans qu'aucune des deux secondes courbures géodésiques le soit ; il suffit que l'on ait la relation $\frac{p}{p_1}=-\frac{V}{V_1}$, c'est-à-dire que les deux courbures géodésiques soient proportionnelles aux courbures des sections normales correspondantes. C'est ce qui a lieu lorsque les deux lignes ds, ds_1 du système sont tangentes à deux diamètres conjugués non rectangulaires de la conique auxiliaire.

Il est aussi bon de remarquer que les formules (3) et les suivantes serviront à transformer les diverses relations qui existent entre les composantes normales des courbures inclinées. C'est ainsi que les formules (11) du n° 42 ne dépendront

plus, après l'élimination de l, que des courbures des sections normales et de leurs secondes courbures géodésiques. Nous laissons au lecteur le soin de faire cette transformation, qui conduit à des résultats remarquables.

60. *Expression des rayons principaux de courbure.* — Pour déterminer dans le plan tangent à la surface, au point dont il s'agit, la direction des sections normales correspondantes aux rayons principaux de courbure, sections que pour cette raison on appelle *sections normales principales*, ainsi que la valeur des rayons principaux, il suffit d'égaler à zéro la différentielle de $\frac{1}{p}$ donnée par l'équation (1), cette différentielle étant prise par rapport à l'angle α; et en remarquant que l'angle β est une fonction de α donnée par l'équation

$$(4)\qquad \sin^2\varphi = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi;$$

celle-ci est donnée par l'équation (12) du n° 43, dans laquelle les arcs ont été remplacés par les sinus proportionnels.

Les différentielles de ces deux équations donnent

$$\left(\frac{\sin\alpha}{r_1} + \frac{\sin\beta}{l}\right)\cos\alpha\, d\alpha = -\left(\frac{\sin\beta}{r} + \frac{\sin\alpha}{l}\right)\cos\beta\, d\beta,$$

$$(\sin\alpha + \cos\varphi\sin\beta)\cos\alpha\, d\alpha = -(\sin\beta + \cos\varphi\sin\alpha)\cos\beta\, d\beta.$$

En divisant l'une par l'autre, on obtient sans difficulté, $\frac{1}{\varpi}$ étant un rayon principal,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\dfrac{\sin\alpha}{r_1} + \dfrac{\sin\beta}{l}}{\sin\alpha + \cos\varphi\sin\beta} &= \frac{\dfrac{\sin\beta}{r} + \dfrac{\sin\alpha}{l}}{\sin\beta + \cos\varphi\sin\alpha} \\ &= \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{r_1} + \dfrac{\sin^2\beta}{r} + \dfrac{2\sin\alpha\sin\beta}{l}}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\varpi}. \end{aligned} \right.$$

Si, entre deux quelconques de ces valeurs de $\frac{1}{\varpi}$, on élimine le rapport de $\sin\beta$ à $\sin\alpha$, on trouve

$$(6)\quad \frac{\sin^2\varphi}{\varpi^2} - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} - \frac{2\cos\varphi}{l}\right)\frac{1}{\varpi} + \left(\frac{1}{rr_1} - \frac{1}{l^2}\right) = 0.$$

Cette équation fait connaître les valeurs de ϖ, qui sont au nombre de deux, comme cela devait être; quant à la direction des sections principales, elle est donnée par l'équation (3) elle-même, qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} &\sin^2\beta\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r}\right) + \sin\beta\sin\alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \\ &\qquad - \sin^2\alpha\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r_1}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

On reconnaît que les racines de ces équations sont réelles, car la quantité située sous le radical se met dans la première comme dans la seconde équation, sous la forme suivante

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)^2 \sin^2\varphi + \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)\cos\varphi - \frac{2}{l}\right]^2,$$

qui est la somme de deux carrés.

On reconnaîtrait aussi sans difficulté que les deux directions données par les racines de l'équation (5) sont rectangulaires entre elles.

Les deux équations (4) et (5), se rapportant à un système quelconque, jouissent de ce double avantage : 1° de donner les propriétés géométriques des rayons principaux de courbure dans un système quelconque, et par conséquent indépendantes de tout système; 2° de fournir l'expression de ces rayons de courbure et de leurs directions, propre à chaque système.

61. *Mesure de la courbure de la surface dans un système quelconque de coordonnées.* — D'après Gauss, et pour des raisons que nous exposerons dans le Chapitre suivant, le produit des deux courbures principales, en un point d'une surface, sert de mesure à la courbure de la surface; l'on aura donc, d'après l'équation (4),

$$(7) \qquad \frac{\sin^2\varphi}{\varpi\varpi_1} = \frac{1}{rr_1} - \frac{1}{l^2}.$$

Cette équation démontre que la quantité auxiliaire $\frac{1}{K_n^2}$, qui représente le rapport du binôme $\frac{1}{rr_1} - \frac{1}{l^2}$ au carré du sinus

des lignes coordonnées, et que nous avons introduite dans nos calculs aux nos 37 et suivants, n'est autre chose que le produit des courbures principales de la surface.

Si les éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$ des deux lignes coordonnées sont dirigés suivant deux diamètres de la conique auxiliaire, conjugués entre eux, les courbures inclinées des lignes coordonnées projetées sur la normale à la surface sont nulles (no 54); donc l'équation précédente devient

$$(7') \qquad \frac{\sin^2\varphi}{\varpi_0\varpi_1} = \frac{1}{rr_1};$$

or, dans ce cas, la tangente de l'angle φ étant égale (no 59) à l'un des deux rapports $-\frac{\wp}{r}, \frac{\wp_1}{r_1}$, la formule précédente se transforme en la suivante

$$\frac{\cos^2\varphi}{\varpi_0\varpi_1} = -\frac{1}{\wp\wp_1};$$

donc la courbure de la surface est égale et de signe contraire au rapport du produit des deux secondes courbures géodésiques des lignes coordonnées au carré du cosinus de l'angle de ces deux lignes.

Si le système des lignes coordonnées est rectangulaire quelconque, les courbures $\frac{1}{\wp}, \frac{1}{\wp_1}$ étant égales, on a

$$\frac{1}{\varpi_0\varpi_1} = \frac{1}{rr_1} - \frac{1}{\wp^2}.$$

On peut calculer la courbure de la surface en fonction de la courbure de trois sections normales à la surface suivant $d\sigma$, $d\sigma_1$, ds; il suffit d'éliminer la courbure $\frac{1}{l}$ entre les deux équations (1) et (7); on trouve ainsi

$$\begin{aligned}\frac{4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\varphi}{\varpi_0\varpi_1} &= \left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\beta}{\sqrt{r}}+\frac{\sin\varphi}{\sqrt{p}}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\beta}{\sqrt{r}}-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{p}}\right)\\ &\times\left(\frac{\sin\beta}{\sqrt{r}}+\frac{\sin\varphi}{\sqrt{p}}-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{r_1}}\right)\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{p}}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\beta}{\sqrt{r}}\right).\end{aligned}$$

On tire de cette équation les conséquences suivantes :

1° En un point d'une surface, le second membre de l'équation précédente, divisé par le carré du produit des sinus des angles que trois courbes passant par ce point font entre elles deux à deux, restera constant quelles que soient les directions de ces courbes. Cette propriété n'aura pas lieu seulement en un point de la surface, mais en tous les points d'une même ou de plusieurs surfaces pour lesquelles la courbure de la surface ou des surfaces reste la même.

2° Si, en deux points d'une même surface, ou de deux surfaces différentes, les courbures de trois sections normales formant entre elles des angles égaux chacun à chacun, sont égales entre elles, chacune à chacune, les courbures de la surface ou des surfaces sont les mêmes en ces deux points.

62. *De la courbure sphérique.* — On désigne sous ce nom la moyenne arithmétique des courbures principales d'une surface. L'équation (6) donne

$$(8) \qquad \left(\frac{1}{\varpi_0} + \frac{1}{\varpi_1}\right)\sin^2\varphi = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} - \frac{2\cos\varphi}{l}.$$

Si les éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$ des lignes coordonnées sont dirigés suivant deux rayons vecteurs de la conique auxiliaire conjugués entre eux, la formule devient

$$\left(\frac{1}{\varpi_0} + \frac{1}{\varpi_1}\right)\sin^2\varphi = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}.$$

Dans cette même hypothèse, en remplaçant $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$ par leurs valeurs (3), (3') en fonction des secondes courbures géodésiques, on obtient

$$\left(\frac{1}{\varpi_0} + \frac{1}{\varpi_1}\right)\sin 2\varphi = 2\left(\frac{1}{\mathcal{P}} - \frac{1}{\mathcal{P}_1}\right).$$

Enfin, en raisonnant comme dans le numéro précédent, on trouve la courbure sphérique de la surface en fonction des courbures normales de trois courbes quelconques tracées sur la surface par le point que l'on considère, et des angles qu'elles

forment entre elles deux à deux; l'expression de cette courbure est

$$\left(\frac{1}{\varpi_0}+\frac{1}{\varpi_1}\right)\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi=\frac{\sin 2\alpha}{2r_1}+\frac{\sin 2\beta}{2r}+\frac{\sin 2\varphi}{2p}.$$

Cette formule donne naissance à des remarques analogues à celles qui terminent le numéro précédent.

63. *De la différence des courbures principales.* — La remarque que nous avons faite à la fin du n° 60 prouve que la partie radicale de l'équation (6), supposée résolue, exprimant la différence des racines de cette équation, l'on a l'expression

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\varpi_0}-\frac{1}{\varpi_1}\right)^2\sin^4\varphi\\ &\quad=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)^2\sin^2\varphi+\left[\frac{2}{l}-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\cos\varphi\right]^2,\end{aligned}\right.$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme suivante, en ayant égard aux équations (3) et (3'),

$$(9')\quad \left(\frac{1}{\varpi_0}-\frac{1}{\varpi_1}\right)^2\sin^2\varphi=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\psi_1}\right)^2.$$

Si les courbes $d\sigma$, $d\sigma_1$ sont conjuguées entre elles, $\frac{1}{l}$ devenant nul, on obtient

$$\left(\frac{1}{\varpi_0}-\frac{1}{\varpi_1}\right)^2\sin^4\varphi=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)^2\sin^2\varphi+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)^2\cos^2\varphi.$$

Dans ce cas, si l'on exprime les courbures $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$ en fonction des deuxièmes courbures géodésiques correspondantes, au moyen des relations

$$(10)\qquad \frac{1}{r}=-\frac{\tang\varphi}{\psi},\quad \frac{1}{r_1}=\frac{\tang\varphi}{\psi_1},$$

on obtient l'expression suivante :

$$\left(\frac{1}{\varpi_0}-\frac{1}{\varpi_1}\right)\frac{\sin^2 2\varphi}{4}=\left(\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\psi_1}\right)\sin^2\varphi+\left(\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\psi_1}\right)\cos^2\varphi.$$

6.

Si le système des lignes coordonnées est rectangulaire, l'on a

$$\left(\frac{1}{\varpi_0}-\frac{1}{\varpi_1}\right)^2=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)^2+\frac{4}{l^2}.$$

Le carré de la différence des courbures principales est généralement égal à la somme de deux carrés.

64. *Indicatrice.* — Si, de l'extrémité de l'arc ds, on abaisse un plan perpendiculaire à la normale à la surface, menée par l'autre extrémité, la projection dn de ds sur cette normale est troisième proportionnelle entre ds et le double du rayon de courbure p de la section normale suivant l'élément ds; l'équation (1) devient donc

$$(11) \qquad 2\,dn\,\frac{\sin^2\varphi}{ds^2}=\frac{\sin^2\alpha}{r_1}+\frac{\sin^2\beta}{r}+\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{l},$$

ce qui démontre que l'extrémité de l'arc ds décrit, autour du point que l'on considère sur la surface, une conique qui est semblable à la conique auxiliaire dont nous avons fait usage, semblablement placée, dans un plan parallèle au plan tangent. Cette nouvelle conique a été appelée par M. Charles Dupin *indicatrice* de la surface au point dont il s'agit, parce qu'en ce point elle fait connaître la nature de la surface, comme il est facile de le voir par la discussion de cette courbe.

Des ombilics. — Lorqu'en un point de la surface l'indicatrice est un cercle, ou, ce qui revient au même, lorsqu'en ce point toutes les sections normales ont même courbure, ce point est appelé *ombilic*. Pour obtenir des ombilics d'une surface, il faut exprimer que les racines de l'équation (6) des rayons principaux de courbure sont égales; or, comme la quantité radicale de ces racines est donnée par l'équation (9), il faut égaler à zéro le second membre de cette équation. Comme il est égal à la somme de deux carrés, on a les deux conditions

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1},\quad \frac{1}{l}=\frac{\cos\varphi}{r}.$$

On conclut : 1° qu'il ne suffit pas que les courbures de deux sections normales faites suivant les deux courbes coordonnées

soient égales, il faut que la composante normale de la courbure inclinée soit égale au produit de la courbure d'une des deux sections par le cosinus de l'angle des lignes coordonnées; ou, ce qui revient au même, que la seconde courbure géodésique de la section (3) soit nulle; 2° que le nombre des ombilics d'une surface est généralement fini, puisque ces points sont déterminés par trois équations, qui sont les deux précédentes, et l'équation de la surface. Si le nombre des équations se réduit à deux, on trouve une courbe située sur la surface dont tous les points sont des ombilics; si ces équations se réduisent à une seule, la surface est telle, qu'un quelconque de ses points est un ombilic.

Si le système est rectangulaire, l'on a $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{l} = \frac{1}{\mathfrak{V}}$, c'est-à-dire qu'en ce point les courbures de deux lignes coordonnées sont égales entre elles, et que la deuxième courbure géodésique d'une des lignes coordonnées est nulle.

65. *De l'angle de deux normales à la surface infiniment voisines.* — Par le point A pris sur la surface, on mène une normale extérieure AN, et une droite AN′ parallèle à la normale infiniment voisine menée par l'extrémité du déplacement ds. Soit AM la projection de AN′ sur le plan normal à la surface mené suivant ds, ces trois droites forment un trièdre rectangle suivant AM, l'angle NAM est l'angle $\frac{ds}{p}$ de contingence de la section normale suivant ds, l'angle MAN′ est l'angle $\frac{ds}{V}$ de seconde contingence géodésique de l'arc ds, l'angle NAN′ est l'angle des deux normales, infiniment voisines, menées par les extrémités de l'élément ds. Nous représentons cet angle par $\frac{ds}{W}$. Le trièdre que nous venons de construire donne la grandeur de cet angle et l'angle ε que son plan fait avec le plan normal suivant ds, au moyen des trois équations entre les trois angles de ce trièdre :

$$\overline{NAN'}^2 = \overline{N'AM}^2 + \overline{MAN}^2,$$

$$N'AM = N'AN \sin\varepsilon, \quad MAN = N'AN \cos\varepsilon.$$

Si on y remplace ces angles par leurs valeurs, on obtient

$$(12)\qquad \frac{1}{W^2}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{V^2},\quad \frac{1}{p}=\frac{1}{W}\cos\varepsilon,\quad \frac{1}{V}=\frac{1}{W}\sin\varepsilon.$$

Si l'on a égard aux expressions de $\frac{1}{p}, \frac{1}{V}$ données par les formules (1) et (2'), que nous écrirons sous la forme suivante :

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{p}\sin\varphi = (i+j_1)\sin\beta+(i_1+j)\sin\alpha,\\[2mm] \dfrac{ds}{V}\sin\varphi = -(i+j_1)\cos\beta+(i_1+j)\cos\alpha, \end{cases}$$

on aura, en élevant au carré et en ajoutant membre à membre,

$$(14)\qquad \frac{ds^2}{W^2}\sin^2\varphi=(i+j_1)^2+(i_1+j)^2-2(i+j_1)(i_1+j)\cos\varphi,$$

laquelle donne l'angle de deux normales menées à la surface par les deux extrémités de l'élément ds, au moyen d'une expression symétrique des angles de contingence propre ou inclinée des sections droites faites suivant les lignes coordonnées. Cette équation, en y introduisant les courbures correspondantes aux angles de contingence, prend la forme

$$(14')\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin^2\varphi}{W^2}=\left(\dfrac{\sin\beta}{r}+\dfrac{\sin\alpha}{l}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\alpha}{r_1}+\dfrac{\sin\beta}{l}\right)^2\\[2mm] \qquad\qquad -2\cos\varphi\left(\dfrac{\sin\beta}{r}+\dfrac{\sin\alpha}{l}\right)\left(\dfrac{\sin\alpha}{r_1}+\dfrac{\sin\beta}{l}\right), \end{cases}$$

qui se rapporte à un système quelconque de coordonnées curvilignes.

Si le système est rectangulaire, elle devient

$$\frac{1}{W^2}=\left(\frac{\cos\alpha}{r}+\frac{\sin\alpha}{\psi}\right)^2+\left(\frac{\sin\alpha}{r_1}+\frac{\cos\alpha}{\psi}\right)^2.$$

Si de plus les coordonnées sont tangentes aux sections principales, on obtient

$$\frac{1}{W^2}=\frac{\cos^2\alpha}{\varpi_0^2}+\frac{\sin^2\alpha}{\varpi_1^2},$$

qui est une formule connue.

Si le système étant oblique coïncide avec deux directions conjuguées de la conique auxiliaire, $\frac{1}{l}$ est nul, et l'on obtient l'équation

$$\frac{\sin^4\varphi}{W^2} = \frac{\sin^2\beta}{r^2} + \frac{\sin^2\alpha}{r_1^2} - 2\cos\varphi\frac{\sin\alpha\sin\beta}{rr_1},$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante, par suite des relations qui existent entre r et $\mathfrak{P}$, r_1 et $\mathfrak{P}_1$ (63) :

$$\frac{\sin^2 2\varphi}{4W^2} = \frac{\sin^2\beta}{\mathfrak{P}^2} + \frac{\sin^2\alpha}{\mathfrak{P}_1^2} + 2\cos\varphi\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}.$$

Ces différentes formules, se rapportant à divers systèmes de coordonnées, font connaître la courbure $\frac{1}{W}$ en fonction des courbures normales propres ou inclinées des lignes coordonnées, et des angles que l'élément ds fait avec ces lignes.

Il est facile de voir que si le déplacement ds prend toutes les positions possibles sur la surface autour du point dont il s'agit, et qu'on porte, à partir de ce point, sur la direction de l'élément ds, des longueurs proportionnelles à la valeur correspondante de W, l'extrémité de cette longueur décrira une conique qui sera représentée dans le système polaire par une des équations précédentes.

Cette conique auxiliaire C_1 est concentrique avec la conique C, que nous avons considérée au n° 55, et ses axes coïncident en direction, mais non en grandeur.

On reconnaît aisément que si deux déplacements ds_0, ds_1 sont conjugués par rapport à la conique auxiliaire C, et qu'on appelle θ l'angle de ces deux déplacements, W_0, W_1 les valeurs de W correspondantes; et V_0, V_1 les valeurs correspondantes de V, l'on obtient, au moyen des équations (12) et (10), les valeurs suivantes

$$\frac{1}{W_0} = -\frac{1}{V_0\cos\theta}, \quad \frac{1}{W_1} = \frac{1}{V_1\cos\theta},$$

desquelles on déduit les deux relations

$$\frac{1}{W_0 W_1} = \frac{1}{\varpi_0 \varpi_1}, \quad \frac{1}{W_0} + \frac{1}{W_1} = \sin\theta\left(\frac{1}{\varpi_0} + \frac{1}{\varpi_1}\right).$$

Ainsi le produit $\frac{1}{W_0 W_1}$ correspondant à deux déplacements ds_0, ds_1 conjugués dans la conique C est constant et égal à la courbure de la surface.

66. *De la plus courte distance de deux normales infiniment voisines.* — La plus courte distance dt de deux normales infiniment voisines est perpendiculaire à la fois à la direction de ces deux normales; donc elle est perpendiculaire à la face NAN' du trièdre que nous avons considéré dans le numéro précédent; soit η l'angle que cette plus courte distance forme avec le plan normal mené à la surface suivant ds, les deux dernières équations (12) deviendront

$$(15) \qquad \frac{1}{p} = \frac{\sin\eta}{W}, \quad \frac{1}{V} = -\frac{\cos\eta}{W};$$

or, si l'on appelle α', β' les angles que la plus courte distance dt fait avec les lignes coordonnées $d\sigma$, $d\sigma_1$, l'on a les deux équations

$$\begin{aligned} \sin\varphi\cos\eta &= \sin\alpha\cos\beta' + \sin\beta\cos\alpha' \\ &= \sin\alpha'\cos\beta + \sin\beta'\cos\alpha, \\ -\sin\varphi\sin\eta &= \sin\alpha\sin\beta' - \sin\beta\sin\alpha' \\ &= \cos\alpha'\cos\beta - \cos\beta'\cos\alpha. \end{aligned}$$

D'après cela, les valeurs de $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{W}$ donneront

$$(15') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin^2\varphi}{p} &= +\sin\varphi\left(\sin\beta\frac{\sin\alpha'}{W} - \sin\alpha\frac{\sin\beta'}{W}\right), \\ \frac{\sin^2\varphi}{V} &= -\sin\varphi\left(\cos\beta\frac{\sin\alpha'}{W} + \cos\alpha\frac{\sin\beta'}{W}\right); \end{aligned} \right.$$

or, les équations (13) peuvent s'écrire sous la forme

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin^2\varphi}{p} &= \quad \sin\beta\left(\frac{\sin\beta}{r} + \frac{\sin\alpha}{l}\right) + \sin\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{r_1} + \frac{\sin\beta}{l}\right), \\ \frac{\sin^2\varphi}{V} &= -\cos\beta\left(\frac{\sin\beta}{r} + \frac{\sin\alpha}{l}\right) + \cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{r_1} + \frac{\sin\beta}{l}\right); \end{aligned} \right.$$

identifiant ces équations avec les équations (15′), nous trouvons

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{W}\sin\alpha' &= \frac{\sin\beta}{r} + \frac{\sin\alpha}{l},\\ -\frac{\sin\varphi}{W}\sin\beta' &= \frac{\sin\alpha}{r_1} + \frac{\sin\beta}{l}.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations font connaître les angles α', β' que la plus courte distance dt fait avec les deux lignes coordonnées $d\sigma$, $d\sigma_1$, en même temps qu'elles donnent la signification géométrique de deux binômes, qui sont les seconds membres des équations (16), et qui se présentent souvent dans la théorie.

Pour obtenir l'expression de la plus courte distance dt, il suffit de projeter une ligne quelconque, par exemple ds, comprise entre les deux normales, sur cette plus courte distance; on obtient ainsi

$$dt = ds\cos\eta = -\,ds\,\frac{W}{V}.$$

67. *Point central, sa distance au plan tangent.* — Le point où la plus courte distance dt rencontre la normale est appelé *point central;* calculons la distance de ce point au plan tangent (*fig.* 7). Soit A le point considéré sur la surface, A′ le

Fig. 7.

point infiniment voisin, AC la direction de la plus courte distance dt. Si l'on mène suivant AC un plan normal à la sur-

face, il rencontrera la normale A′D au point central D. En appelant Δ le segment CD, le triangle CA′D donne $\frac{\mathrm{CA}'}{\mathrm{CD}} = \frac{ds}{\mathrm{W}}$, donc

$$(17)\qquad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\mathrm{W}\sin\eta} = \frac{p}{\mathrm{W}^2} = \frac{1}{p\sin^2\eta}.$$

Si l'on veut avoir la surface engendrée par la plus courte distance de deux normales infiniment voisines, lorsque la seconde prend toutes les positions, par suite de la rotation de ds autour du pied de la première, en prenant pour axes coordonnés des x et des y les deux tangentes aux deux sections principales, et pour axe des z, la normale, les deux équations (16), rapportées au système rectangulaire de deux sections principales, donnent, par la division,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\varpi_1}{\varpi_0}\cot\alpha,$$

et la deuxième équation (17) dans le même système, en remplaçant Δ par z, devient

$$z = \frac{\dfrac{\cos^2\alpha}{\varpi_0} + \dfrac{\sin^2\alpha}{\varpi_1}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\varpi_0^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{\varpi_1^2}}.$$

L'élimination de α entre ces deux équations donne l'équation de la surface conoïde cherchée

$$z = \frac{\varpi_0 y^2 + \varpi_1 x^2}{y^2 + x^2}.$$

On déduit facilement de ce qui précède que, pour deux directions de ds, conjuguées entre elles dans la conique C, les distances Δ et Δ_1 correspondantes à ces directions sont entre elles comme les rayons de courbure des sections normales faites suivant ces directions.

68. *Distribution des normales autour d'un point.* — Cherchons l'intersection de la normale infiniment voisine de celle considérée avec le plan normal mené suivant l'élément $d\sigma_1$ d'une des deux lignes coordonnées. Soit (*fig.* 7) ce plan normal ABE,

E la trace de la normale A′D; appelons du_1 la longueur AB, et $BE = +\delta_1$, le triangle BA′E d'une part et le triangle BAA′ de l'autre donnent

$$\frac{BA'}{BE} = \frac{ds}{W}, \quad \frac{ds}{\cos(\beta-\eta)} = \frac{BA'}{\sin\beta} = \frac{du_1}{\cos\eta}.$$

On déduit de ces équations

$$\frac{\sin\beta}{\delta_1} = \frac{\cos(\beta-\eta)}{W}, \tag{18}$$

$$du_1 = \frac{\cos\eta}{\cos(\beta-\eta)}\,ds. \tag{19}$$

Si l'on développe le cosinus, en ayant égard aux équations (15), l'on trouve pour les équations (18) et (19)

$$\frac{\sin\beta}{\delta_1} = \frac{\sin\beta}{p} - \frac{\cos\beta}{V}, \tag{18'}$$

$$\frac{du_1}{ds}\sin\beta = -\frac{\delta_1}{V}. \tag{19'}$$

Si l'on substitue dans ces équations les valeurs de $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{V}$ données par les équations (13), on trouve

$$(18'')\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin^2\varphi\sin\beta}{\delta_1} &= \left(\frac{\sin\beta}{r} + \frac{\sin\alpha}{l}\right) \\ &\quad - \cos\varphi\left(\frac{\sin\alpha}{r_1} + \frac{\sin\beta}{l}\right) \quad (2), \end{aligned} \right.$$

$$(19'')\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{du_1}{ds}\,\frac{\sin^2\varphi\sin\beta}{\delta_1} \\ &\quad = \sin^2\alpha\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r_1}\right) + \sin\alpha\sin\beta\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) \\ &\quad\quad - \sin^2\beta\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r}\right) \quad (2). \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de δ_1 et de du_1 sont les coordonnées rectilignes orthogonales de la trace de la normale infiniment voisine avec le plan normal mené suivant $d\sigma_1$, de sorte que si l'on élimine α et β de ces deux équations, au moyen de la relation

$\alpha + \beta = \varphi$, on aura la courbe décrite par cette trace dans ce plan normal, lorsque l'élément ds est connu en fonction de α et de β, ce qui revient à dire que l'on se donne la courbe décrite par l'extrémité de cet élément variable, tournant autour de l'autre extrémité.

Lorsque cet élément décrit un cercle sur la surface, cette courbe est du quatrième degré, comme on le verra plus bas.

Mais quelle que soit la courbe décrite par ds, si le système des coordonnées $d\sigma$, $d\sigma_1$ est orthogonal, et coïncide avec les directions des sections principales, les équations (18″) et (19″) donnent

$$(18''') \qquad \frac{1}{\delta_1} = \frac{1}{\varpi_0},$$

$$(19''') \qquad \frac{du_1}{ds}\frac{1}{\varpi_0} = \sin\alpha\left(\frac{1}{\varpi_0} - \frac{1}{\varpi_1}\right);$$

le lieu des traces dans le plan de la section principale qui a pour courbure $\frac{1}{\varpi_1}$ est une parallèle à la tangente de cette section, située à la distance ϖ_0 de cette tangente, et l'on trouverait de même que le lieu des traces dans le plan de l'autre section principale est une parallèle à la tangente à cette section, située à la distance ϖ_1 de cette tangente.

Ainsi, quelle que soit la courbe infiniment petite décrite par ds, considéré comme rayon vecteur variable en grandeur et en direction autour du point pris sur la surface, la normale menée par chaque point de cette courbe s'appuie à la fois sur deux droites parallèles aux tangentes de ces sections, menées chacune par le centre de courbure de l'autre section. Ce théorème est dû à Sturm.

Si la courbe infiniment petite décrite par ds est une ellipse, ayant les demi-axes a et b, dirigés dans le même sens que ceux de la conique auxiliaire C, la surface réglée décrite par la normale est donnée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z}{\varpi_0}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z}{\varpi_1}\right)^2} = 1.$$

Lorsque l'on coupe la surface réglée par des plans parallèles

au plan des xy, on trouve des ellipses; deux de ces ellipses dégénèrent en lignes droites, qui sont les deux directrices de la surface, et deux sont des cercles. Cette dernière circonstance a lieu lorsque l'on prend pour distance du plan sécant, l'une des deux valeurs de z données par les deux équations

$$\frac{a}{\varpi_0} + \frac{b}{\varpi_1} = \frac{a+b}{z}, \quad \frac{a}{\varpi_0} - \frac{b}{\varpi_1} = \frac{a-b}{z}.$$

L'une de ces conditions exige que le plan parallèle au plan des xy soit compris entre les deux centres des courbures principales, et l'autre que le plan soit situé en dehors.

Quant à la courbe interceptée sur la surface réglée par un plan normal mené par un point considéré, et formant avec la section principale, dont la courbure est $\frac{1}{\varpi_0}$, un angle quelconque θ, elle est de quatrième degré, et son équation, rapportée aux coordonnées rectangles z et la distance ι d'un point à l'axe des z, est

$$\frac{1}{\frac{a^2}{\cos^2\theta}\left(1-\frac{z}{\varpi_0}\right)^2} + \frac{1}{\frac{b^2}{\sin^2\theta}\left(1-\frac{z}{\varpi_1}\right)^2} = \frac{1}{\iota^2}.$$

69. *Des traces associées de la normale infiniment voisine sur deux plans normaux.* — Nous appelons traces associées de la normale les intersections de cette normale avec les deux plans normaux à la surface menés par les deux éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$ des lignes coordonnées. En appelant toujours du_1 et δ_1 les coordonnées de la trace de la normale faite dans le plan normal suivant $d\sigma_1$, et du, δ les coordonnées de la trace de cette même normale sur le plan normal mené suivant $d\sigma$, on déduit sans peine des deux équations contenues dans le type (18) les deux équations

$$\frac{\sin\varphi}{p} = \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\delta_1} + \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\delta},$$

$$\frac{\sin\varphi}{V} = \sin\alpha\sin\beta\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta_1}\right),$$

lesquelles donnent la courbure $\frac{1}{p}$, et la seconde courbure géo-

désique $\frac{1}{V}$ d'une section normale faite suivant ds en fonction des distances δ et δ_1 au plan tangent, des traces que la normale menée à l'extrémité de cet élément fait avec les deux plans normaux menés suivant les éléments des lignes coordonnées. On déduit de cette formule

$$\frac{\sin^2\varphi}{W^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\delta^2} + \frac{\sin^2\beta}{\delta_1^2} + \frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\delta\delta_1}\cos\varphi.$$

Ces formules nouvelles sont très-générales et renferment, comme cas particuliers, toutes les expressions déjà données de p, de V et de W; elles ne laissent rien à désirer sous le rapport de la simplicité.

Les équations (19′) comparées entre elles donnent l'expression

$$\frac{du_1}{ds}\frac{\sin\beta}{\delta_1} = \frac{du}{ds}\frac{\sin\alpha}{\delta}.$$

Les équations (18″) peuvent s'écrire sous les deux formes suivantes :

$$-\frac{\sin\alpha}{\varpi_1} = \sin\beta\left(\frac{\sin\varphi}{\delta_1} - \frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\cos\varphi}{\varpi}\right),$$

$$\frac{\sin\beta}{\varpi} = \sin\alpha\left(\frac{\sin\varphi}{\delta} - \frac{\sin\varphi}{r_1} - \frac{\cos\varphi}{\varpi_1}\right).$$

Or, si l'on multiplie l'une par l'autre, on obtient

$$-\frac{1}{\varpi\varpi_1} = \frac{\sin^2\varphi}{\delta\delta_1} - \frac{\sin\varphi}{\delta}\left(\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi}{\varpi}\right) - \frac{\sin\varphi}{\delta_1}\left(\frac{\sin\varphi}{r_1} + \frac{\cos\varphi}{\varpi_1}\right)$$
$$+\left(\frac{\sin\varphi}{r_1} + \frac{\cos\varphi}{\varpi_1}\right)\left(\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi}{\varpi}\right),$$

équation que l'on peut aussi écrire comme il suit

$$\frac{1}{\delta\delta_1} - \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{r} - \frac{\cot\varphi}{\varpi}\right) - \frac{1}{\delta_1}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\cot\varphi}{\varpi_1}\right) + \frac{1}{\varpi_0\varpi_1} = 0.$$

Ces équations expriment que les distances au plan tangent des traces d'une normale sur deux plans de deux sections normales invariables satisfont à la division homographique,

pourvu que cette normale, dans ses différentes positions, soit infiniment voisine du point considéré.

Si l'on élimine l'angle α dans les équations (19‴), on trouve

$$\frac{du_1^2}{\varpi_0^2 ds^2} + \frac{du}{\varpi_1^2 ds^2} = \left(\frac{1}{\varpi_0} - \frac{1}{\varpi_1}\right)^2;$$

donc, si ds reste constant et que par les deux traces on mène des plans perpendiculaires aux deux tangentes des sections principales, l'enveloppe de la ligne d'intersection des deux plans est un cylindre elliptique.

Soit δ_2 la distance au plan tangent de la trace de la même normale avec un plan normal mené suivant un troisième élément $d\sigma_2$, formant avec ds l'angle β_1 et l'angle $(d\sigma_1, d\sigma_2)$ avec $d\sigma_1$, l'on a l'équation

$$\frac{\sin(ds, d\sigma_2)\sin(d\sigma, d\sigma_1)}{\delta_2} + \frac{\sin(ds, d\sigma)\sin(d\sigma_1, d\sigma_2)}{\delta} + \frac{\sin(ds, d\sigma_1)\sin(d\sigma_2, d\sigma)}{\delta_1} = 0.$$

70. *Des lignes de courbure.* — On appelle ainsi les lignes tracées sur la surface telles que si, en deux points infiniment voisins pris sur une de ces lignes, on mène deux normales à la surface, ces deux normales se rencontrent, ou du moins leur distance est un infiniment petit d'ordre supérieur.

Pour avoir l'équation des lignes de courbure, il suffit d'exprimer que la distance de deux normales infiniment voisines est nulle; or, si l'on se reporte à l'expression de cette distance trouvée à la fin du n° 66, on voit que ds n'étant pas nul, ni l'angle W des deux normales, on trouve pour condition $\frac{1}{V} = 0$, c'est-à-dire que la seconde courbure géodésique est nulle, et réciproquement. Nous avons déjà vu qu'il existe deux directions pour lesquelles la seconde courbure géodésique est nulle, et que ces deux directions sont celles des sections principales. Donc les directions des deux sections principales en un point sont celles des deux lignes de courbure en ce point. Ce qui revient à dire qu'en ce point les deux sections principales et les deux lignes de courbure sont tan-

gentes. Si l'on développe la condition $\frac{1}{V} = 0$, en remplaçant les sinus par les arcs coordonnés proportionnels, on trouvera, pour l'équation des lignes de courbure dans un système quelconque de coordonnées curvilignes,

$$d\sigma_1^2\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r_1}\right)+d\sigma d\sigma_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)-d\sigma^2\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r}\right)=0.$$

Cette équation fait connaître toutes les propriétés et renferme toute la théorie des lignes de courbure. On voit qu'en chaque point il y a deux lignes, puisque l'équation est du second degré, et l'on voit aussi que ces deux lignes se coupent à angle droit. En effet, si l'on appelle m_0 et m_1 les deux valeurs du rapport $\frac{d\sigma_1}{d\sigma}$ qui satisfont à cette équation, l'angle θ des deux lignes est donné par la formule

$$\tang\theta = \frac{\sin\varphi(m_1 - m_0)}{(m_0 + m_1)\cos\varphi + (1 + m_0 m_1)};$$

or, en remplacant m_0 et m_1 par leurs valeurs, on trouve un dénominateur nul.

Lignes de courbure communes à deux surfaces. — Soient deux surfaces F et F_1 qui se coupent suivant une courbe E, et sous un angle γ variable d'un point à un autre de la courbe E; cherchons la variation de l'angle γ lorsqu'on passe d'un point A à un point A' infiniment voisin pris sur l'intersection commune. Soient An, An_1 les deux normales extérieures aux surfaces F, F_1; $A'n'$, $A'n'_1$ les deux normales infiniment voisines; $A'V'$, $A'V'_1$ les projections de ces deux dernières sur les plans normaux nAA', n_1AA'. L'angle des deux normales au point A étant γ, il devient $\gamma + d\gamma$ lorsqu'on passe au point A'. Or ce dernier angle est la somme des trois angles $n'A'V'$, $V'A'V'_1$, $V'_1A'n'_1$; le premier et le dernier sont les angles de deuxième contingence géodésique $\frac{ds}{V}$, $\frac{ds}{V_1}$ de l'intersection E par rapport aux deux surfaces F, F_1; le second ne diffère de l'angle γ que par les infiniment petits d'ordre supérieur au premier; on a

donc l'équation

$$d\gamma = \frac{ds}{V} + \frac{ds}{V_1}.$$

Théorème I. — *La variation de l'angle de deux surfaces, quand on passe d'un point à un autre infiniment voisin sur la ligne d'intersection, est la somme des angles de deuxième contingence géodésique de l'intersection par rapport aux deux surfaces.*

On en déduit la variation finie quand on passe d'un point à un autre de l'intersection. Ces deux points correspondant aux valeurs s_0, s_1 de l'arc s de cette intersection et aux valeurs γ_0, γ_1 de γ, on obtient, par intégration,

$$\gamma_1 - \gamma_0 = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{V} + \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{V_1}.$$

Théorème II. — *Si les deux surfaces se coupent sous un angle constant et que la courbe* E *d'intersection soit une ligne de courbure par rapport à la surface* F, *elle sera aussi une ligne de courbure par rapport à la surface* F_1.

En effet, $d\gamma$ et $\frac{ds}{V}$ étant nuls, le théorème I exige que $\frac{ds}{V_1}$ soit aussi nul. Donc....

Les propositions réciproques de ce dernier théorème sont également vraies.

Théorème III. — *Si trois surfaces* F, F_1, F_2 *se coupent deux à deux orthogonalement, elles se coupent aussi deux à deux suivant leurs lignes de courbure.*

En effet, de ce que les trois surfaces se coupent deux à deux sous angle constant, la somme des angles de deuxième contingence géodésique de chaque ligne d'intersection par rapport aux deux surfaces qui la déterminent est nulle par suite du théorème I, ce qui fournit trois équations entre six inconnues. De ce que les trois lignes d'intersection forment deux à deux des angles droits, la somme des angles de deuxième contingence géodésique de deux lignes d'intersection par rapport à la surface sur laquelle elles se trouvent est aussi nulle,

d'après le n° 58, ce qui fournit trois nouvelles équations entre les six mêmes inconnues. Or ces six équations sont linéaires, binômes, privées du terme constant, entre six inconnues. Donc chacune de ces inconnues est nulle, ce qui exige que les lignes d'intersection soient chacune une ligne de courbure par rapport aux deux surfaces qui la déterminent. Donc....

Nous nous occuperons plus loin de la recherche des lignes de courbure d'une surface donnée.

71. *Des tangentes conjuguées.* — Si, par deux points infiniment voisins A, A', pris sur une surface, on mène deux plans tangents T, T', l'intersection de ces deux plans est une tangente conjuguée de la tangente AA'. La théorie des tangentes conjuguées a été introduite dans la Géométrie par M. Charles Dupin.

THÉORÈME. — *Deux tangentes conjuguées sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'indicatrice.*

En effet, le plan P de l'indicatrice du point A passant par le point infiniment voisin A' est parallèle au plan tangent T en A; donc, les intersections de ces deux plans avec le plan T' tangent en A' sont parallèles; or, l'intersection des plans T' et P est la tangente à l'indicatrice, donc elle est conjuguée du rayon vecteur mené en A', lequel, à la limite, se confond avec la tangente AA'. Donc ces deux tangentes conjuguées sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'indicatrice.

Corollaire I. — Si une tangente t est conjuguée d'une autre tangente t' en un point A de la surface, réciproquement la tangente t' sera conjuguée de la tangente t, puisque la construction des deux tangentes dans ce second cas conduira à deux lignes parallèles à deux diamètres conjugués.

Corollaire II. — Si une courbe C est tracée sur une surface et qu'en chacun de ses points on mène les plans tangents à la surface, on obtiendra une surface développable dont la génératrice rectiligne sera en chaque point conjuguée de la tangente à la courbe qu'elle rencontre en ce point.

Corollaire III. — Si la courbe C est une ligne de courbure de la surface F, elle sera aussi une ligne de courbure de la surface développable. En effet, sur cette dernière, la tangente

à la courbe et la génératrice sont deux tangentes conjuguées orthogonales. Donc....

Corollaire IV. — La courbe C a mêmes composantes normale et tangentielle de sa courbure propre par rapport à la surface F et par rapport à la surface développable, puisque les plans tangents et normaux à ces deux surfaces suivant l'élément *ds* de la courbe sont les mêmes, et que d'ailleurs la longueur de l'élément ne change pas. Il en est de même des composantes normale et tangentielle de la courbure inclinée de la courbe C suivant les directions conjuguées.

Corollaire V. — Si l'on développe la surface développable sur le plan tangent à la surface F en un point de la courbe C, les composantes tangentielles des courbures propres ou inclinées suivant les génératrices, ne sont pas altérées, puisque les angles tangentiels ne sont pas altérés, et que l'élément *ds* reste invariable pendant le développement.

Corollaire VI. — Si la courbure tangentielle de la courbe C est nulle, la courbe C se changera en ligne droite sur la surface développable après le développement; et si cette courbure est constante, elle se changera en cercle sur la seconde surface développée. Généralement, si la courbure tangentielle est seulement fonction de l'arc *s*, et de l'angle de contingence tangentielle, la courbe obtenue par le développement de la seconde surface jouira de la même propriété.

Corollaire VII. — Si deux courbes C, C′ tracées sur une surface sont tangentes, ou ont un contact d'un certain ordre, les deux surfaces développables qui enveloppent la surface suivant ces deux courbes seront aussi tangentes, ou auront un contact du même ordre, suivant la génératrice menée au point de contact.

72. *Condition pour que deux courbes* C *et* C′ *tracées sur une surface soient conjuguées.* — Deux courbes C et C′ sont conjuguées lorsque les tangentes au point d'intersection sont conjuguées. D'après ce que nous venons d'établir, ces deux tangentes sont parallèles à deux diamètres conjuguées de l'indicatrice; ceci entraîne la condition (n° 57) que la composante

normale $\frac{1}{\lambda}$ de la courbure inclinée de l'une des deux courbes par rapport à l'autre soit nulle; donc, en remplaçant dans l'équation (2) du même numéro, les rapports $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}$, par les rapports $\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_0$, $\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1$ des arcs coordonnés qui se rapportent aux deux courbes, on aura la condition suivante :

$$(1)\qquad \frac{1}{r}+\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1\frac{1}{r_1}+\left[\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_0+\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1\right]\frac{1}{l}=0.$$

Cette équation servira à reconnaître si deux courbes tracées sur une surface sont conjuguées entre elles; et lorsque l'une des deux courbes sera donnée, elle sera la différentielle de l'équation de la courbe conjuguée.

Lorsque les lignes coordonnées sont conjuguées, cette équation devient

$$(2)\qquad \frac{1}{r}+\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1\frac{1}{r_1}=0.$$

Si l'on demande un système de deux courbes conjuguées se coupant sous un angle donné θ, il faudra que les rapports $\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_0$, $\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1$, que l'on représente, pour abréger, par m_0 et m_1, satisfassent à la condition exprimée par $\tang\theta$, au n° 70; de sorte que si l'on élimine entre cette condition et la première, que nous avons écrite dans ce numéro, le rapport m_0, ou bien $\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_0$, on trouvera pour condition générale des courbes conjuguées se coupant sous l'angle θ, l'équation

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1^2\left[\frac{\sin(\varphi-\theta)}{r_1}+\frac{\sin\theta}{l}\right]\\&\quad+\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\sin\theta+\frac{2\cos\theta\sin\varphi}{l}\right]\\&\qquad+\left[\frac{\sin(\varphi+\theta)}{r}-\frac{\sin\theta}{l}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation doit renfermer, comme cas particulier, l'é-

quation des lignes de courbure qui correspondent à la valeur de θ égale à $\frac{\pi}{2}$; et on retombe en effet sur cette équation lorsqu'on introduit cette hypothèse dans l'équation précédente.

Si les coordonnées sont conjuguées entre elles, l'équation précédente devient

$$\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1^2 \frac{\sin(\varphi-\theta)}{r_1} + \left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1 \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\sin\theta + \frac{\sin(\varphi+\theta)}{r} = 0.$$

Si les coordonnées sont les lignes de courbure de la surface, on a

$$\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1^2 \frac{\cos\theta}{r_1} + \left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1 \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\sin\theta + \frac{\cos\theta}{r} = 0.$$



CHAPITRE VI.

DES POLYGONES GÉODÉSIQUES.

73. *Existence d'un principe fondamental relatif aux éléments tangentiels.* — Les propositions que nous avons démontrées dans les Chapitres qui précèdent sont de deux sortes : les unes se rapportent aux éléments tangentiels des courbes tracées sur la surface, c'est-à-dire aux projections des éléments des courbes sur le plan tangent à la surface; les autres se rapportent aux éléments normaux de ces courbes, c'est-à-dire aux projections de leurs éléments sur le plan normal à la surface. Or toutes les propositions de la première espèce peuvent se condenser en un seul principe géométrique, relatif à la somme des angles d'un polygone géodésique, en entendant par là un polygone dont tous les côtés sont des lignes géodésiques. Ce principe est pour la Géométrie des surfaces ce qu'est pour la Mécanique le principe des fórces vives, dominant, comme lui, tous les faits d'une même catégorie dont ils sont la conséquence immédiate. C'est l'illustre Gauss qui l'a énoncé, et ce géomètre ne s'est point mépris sur la nature de ce principe, lorsqu'il a écrit ces lignes (*) : « Ce théorème, si nous ne nous abusons point, peut être compté au nombre des plus élégants de la théorie des surfaces courbes; » il aurait pu ajouter qu'il est aussi un des plus féconds.

Il se présente comme conséquence des formules, déjà établies, qui se rapportent aux courbures tangentielles des lignes tracées sur les surfaces, et cela de plusieurs manières; on peut aussi l'établir directement. Mais comme les formules relatives aux courbures normales sont indépendantes de ce principe, au lieu de commencer par la démonstration du principe

(*) *Recherches sur les Surfaces*, § XX.

de Gauss, comme nous aurions pu le faire, il nous a paru préférable de suivre une marche qui donnât à la fois et les théorèmes relatifs aux courbures tangentielles et ceux qui sont relatifs aux courbures normales. Mais, dans les applications, il convient de faire usage de ce principe, qui donne sans effort une des équations de la question.

74. *Transformation sphérique des lignes tracées sur la surface.* — Soit une ligne s tracée sur la surface; des différents points de cette ligne menons des normales dans le région extérieure de la surface; du centre d'une sphère de rayon égal à 1, menons des parallèles aux normales, par un déplacement effectué dans le même sens. On détermine ainsi sur la sphère une courbe qui est dite la *transformée sphérique* de la courbe tracée sur la surface, et qui en est comme l'image semblablement placée, c'est-à-dire que, lorsque sur la surface deux lignes partent d'un même point, dans deux directions, les lignes correspondantes partent d'un même point, et sont semblablement placées, ce qui exige que la ligne située à droite de l'autre sur la surface ait sa transformée située à droite de la transformée de la seconde ligne, quand on se placera de la même manière sur les deux surfaces, dans leurs régions extérieures.

Transformée sphérique d'une ligne de courbure. — Nous démontrons les propositions suivantes :

1° Les arcs infiniment petits correspondants de la ligne de courbure et de sa transformée sont parallèles. En effet, les normales à l'extrémité de l'arc $d\sigma$ et de son transformé $d\sigma'$ sont parallèles, et comme les premières se rencontrent et ne diffèrent en longueur à partir du point de rencontre que d'un infiniment petit, il résulte que les deux arcs sont parallèles, et que les plans des secteurs correspondants sont parallèles.

2° Deux plans normaux à la surface et à la sphère suivant des arcs correspondants sont parallèles. Cela résulte de la proposition 1°.

3° Deux arcs correspondants $d\sigma'$, $d\sigma$ sont liés entre eux par la relation $\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{1}{\varpi_0}$, ϖ_0 étant le rayon principal de courbure de l'arc $d\sigma$.

4° Les angles de contingence tangentielle de la courbe σ et

de la transformée σ' sont égaux en des points correspondants. En effet, deux plans normaux infiniment voisins de la courbe σ sont parallèles aux plans normaux de la courbe σ' aux points correspondants; or l'angle des deux premiers est égal à l'angle des deux derniers; ces deux angles sont les projections tangentielles des angles de contingence des deux courbes. Donc....

5° La surface développable, lieu des normales à la surface aux divers points de la ligne de courbure σ, et la surface conique, lieu des rayons de la sphère parallèles à ces normales, sont telles, qu'après le développement sur un plan des deux surfaces, les angles des génératrices correspondantes sont égaux.

6° A un double système de lignes de courbure de la surface F correspond un double système de lignes sphériques orthogonales.

75. *Mesure de la courbure d'une surface.*

Théorème. — *Quel que soit le contour infiniment petit tracé autour d'un point sur une surface, le quotient de l'aire du contour sphérique correspondant par l'aire du premier contour est constant et égal à l'inverse* $\frac{1}{\varpi_0 \varpi_1}$ *du produit des rayons principaux de courbure.*

En effet, soient $d\Omega$, $d\Omega'$ les *aires* de ces deux *contours*, elles peuvent être décomposées par le système des lignes de courbure $d\sigma$, $d\sigma_1$ et par les lignes sphériques correspondantes $d\sigma'$, $d\sigma'_1$ en quadrilatères orthogonaux infiniment petits. Les aires de deux quadrilatères correspondants auront pour expression $d\sigma\,d\sigma_1$, $d\sigma'\,d\sigma'_1$; donc, en vertu du théorème III du numéro précédent

$$d\sigma'\,d\sigma'_1 = \frac{d\sigma\,d\sigma_1}{\varpi_0 \varpi_1},$$

et en faisant la somme des quadrilatères correspondants de part et d'autre, l'on aura

$$d\Omega' = \frac{d\Omega}{\varpi_0 \varpi_1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

C'est à cause de l'invariabilité du rapport de $d\Omega'$ à $d\Omega$ pour un point de la surface, lorsque le contour de ce point est

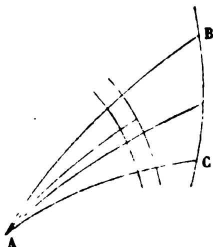
quelconque, mais infiniment petit, que l'on prend, d'après Gauss (*), ce rapport pour mesure de la courbure de la surface de ce point. Telle est la démonstration annoncée au n° 61.

Si l'on considère Ω' et Ω les aires de deux contours finis correspondants, l'on a $\Omega' = \int\int \frac{d\sigma\, d\sigma'}{\varpi_0 \varpi_1}$ étendue à toute la surface du contour, et cette intégrale double, qui joue un rôle important dans la théorie des lignes tracées sur la surface, est appelée *la courbure intégrale de la surface* dans toute l'étendue du contour, nous l'appellerons aussi *aire sphérique du contour.*

76. Théorème de Gauss. — *Dans un polygone de n côtés géodésiques, l'aire sphérique du polygone correspondant est égale à la somme des angles de ce polygone, diminuée d'autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

Démontrons d'abord le théorème pour le triangle géodésique A, B, C. Il s'agit de calculer l'aire sphérique Ω' de ce triangle. Prenons, pour système coordonné sur la surface, les arcs géodésiques menés du point A (*fig.* 8) et l'angle ε qu'un

Fig. 8.



arc géodésique σ fait avec le côté AB. D'après cela, l'élément de l'arc orthogonal des rayons géodésiques sera $d\sigma_1 = H_1\, d\varepsilon$, H_1 étant une fonction de σ et de ε; on aura donc

$$\Omega' = \int\int \frac{H_1\, d\sigma\, d\varepsilon}{\varpi_0 \varpi_1}.$$

Or, si l'on applique la formule (9^{IV}) du n° 41 et la formule

(*) *Recherches sur les Surfaces,* § VI.

(8‴) du n° 29, on a

$$(1)\qquad \left(\frac{d^2 H_1}{d\sigma} = -\frac{H_1 d\sigma}{\varpi_0 \varpi_1},\quad \frac{d H_1 d\varepsilon}{d\sigma} = -I_1\right).$$

Si l'on a égard à la première équation, et qu'on intègre la valeur de Ω' par rapport à $d\sigma$, l'on a

$$\Omega' = -\int \left(\frac{dH_1}{d\sigma} + \text{const.}\right)_0^\sigma d\varepsilon.$$

Or, pour $\sigma = 0$, l'on a

$$\frac{d\,d\sigma_1}{d\sigma} = d\varepsilon,\quad \text{c'est-à-dire}\quad \left(\frac{dH_1}{d\sigma}\right)_0 = 1.$$

Donc, l'intégrale devient, en ayant égard à la seconde des équations (1),

$$\Omega' = \int_0^A \left(-\frac{dH_1}{d\sigma} + 1\right) d\varepsilon = \int_0^A (I_1 + d\varepsilon);$$

mais, d'après la formule (6) du n° 47, l'on a, dans le système de coordonnées géodésiques, α étant l'angle qu'un rayon géodésique quelconque fait avec la courbe BC, l'équation $d\alpha = I_1$, car l'angle φ est droit, et la courbe BC étant géodésique, I est nul. Substituant cette valeur de I_1 dans l'équation précédente, on obtient

$$(2)\qquad \pm\,\Omega' = (\pi - A - B - C). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc, la somme des angles d'un triangle géodésique tracé sur une surface quelconque est supérieure ou inférieure à deux angles droits d'une quantité qui a pour expression l'aire sphérique du triangle géodésique, suivant que la surface est concavo-concave ou concavo-convexe.

On passe sans difficulté de ce cas à celui d'un polygone quelconque géodésique en décomposant ce polygone en triangles géodésiques. La démonstration que nous venons de donner est celle de Gauss, toute basée sur les deux équations du présent numéro.

77. *Principe plus général.* — Le théorème de Gauss ainsi qu'une infinité d'autres se présentent comme conséquences

d'un théorème encore plus général. Transcrivons les deux équations (10) du n° 37 :

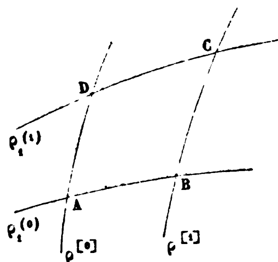
$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\varphi\, d\sigma\, d\sigma_1}{K(\psi)} = -\, d_0[I_1\psi'(\varphi)] - d_1[I\psi'(\varphi)] - d_0 d_1 \psi(\varphi), \\ \dfrac{\sin\varphi\, d\sigma\, d\sigma_1}{K(\psi)} = \quad d_0[J_1\psi'(\varphi)] + d_1[J\psi'(\varphi)] + d_0 d_1 \psi(\varphi). \end{cases}$$

Si nous intégrons la première équation entre deux valeurs de ρ_1, $\rho_1^{[0]}$ et $\rho_1^{[1]}$, et le résultat obtenu entre deux valeurs de ρ, $\rho^{(0)}$ et $\rho^{(1)}$, et qu'on représente par $U'_{(\psi)}$ l'intégrale double du premier membre, par A, B, C, D les angles du quadrilatère curviligne correspondant aux limites que nous venons de fixer, et par $d\sigma_i$, $\frac{1}{R_i}$ l'arc et la projection tangentielle de la courbure d'une quelconque des lignes coordonnées qui limitent le quadrilatère, on aura (*fig.* 9)

$$(4)\quad U'_{(\psi)} = -\,\psi(A) + \psi(\pi - B) - \psi(C) + \psi(\pi - D) - \int \frac{d\sigma_i}{R_i}\psi'(\varphi),$$

le signe $\int$ du dernier terme s'étendant à tout le contour, et l'indice i devant être zéro ou 1, suivant que l'on intègre le long des lignes de la série ρ_1 ou de la série ρ.

Fig. 9.



En opérant de la même manière sur la seconde des équations (1) du présent numéro, et en représentant par $\frac{1}{L_i}$ la projection tangentielle de la courbure inclinée d'une quelconque

des lignes coordonnées qui terminent le contour, on aura

$$(5)\quad U'_{(\psi)} = \psi(A) - \psi(\pi - B) + \psi(C) - \psi(\pi - B) + \int \frac{d\sigma_i}{L_i}\psi'(\varphi),$$

dans laquelle le signe $\int$ du dernier terme se rapporte à tout le contour, pourvu que l'indice i soit fait égal à zéro ou à 1, suivant que l'on intègre le long des lignes de la série ρ_1 ou de la série ρ.

Il est évident que les deux théorèmes (4) et (5) jouissent de la plus haute généralité, et s'appliquent à toutes les formes de la fonction ψ.

Si le quadrilatère est géodésique, les intégrales contenues dans le dernier terme de la formule (4) disparaissent, et l'on a

$$(6)\quad \int\int \frac{d\omega}{K(\psi)} = -\psi(A) + \psi(\pi - B) - \psi(C) + \psi(\pi - D),$$

dont le second membre ne dépend que de la fonction ψ et des angles du quadrilatère géodésique.

78. *Application des formules précédentes.* — 1° Si l'on suppose que la fonction ψ de l'angle φ est $\log\sin\varphi$, n° 38, la formule (4) du numéro précédent devient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\cos u}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1} - \frac{\cos v}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1}\right) \\ &\quad = \log\frac{\sin A . \sin C}{\sin B . \sin D} + \int \frac{d\sigma_i}{R_i}\cot\varphi; \end{aligned}\right.$$

et si le quadrilatère est géodésique, on obtient

$$(8)\quad \int \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\cos u}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1} - \frac{\cos v}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1}\right) = \log\frac{\sin A . \sin C}{\sin B . \sin D}.$$

2° Si l'on suppose que la fonction ψ est $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi)$, n° 38, on trouve la formule

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\cos u_1}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1} - \frac{\cos v_1}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1}\right) \\ &\quad = \log\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}A . \operatorname{tang}\frac{1}{2}B . \operatorname{tang}\frac{1}{2}C . \operatorname{tang}\frac{1}{2}D\right) + \int \frac{d\sigma_i}{R_i \sin\varphi}. \end{aligned}\right.$$

Dans cette dernière formule, les intégrales du second membre disparaissent si le quadrilatère est géodésique.

Nous avons choisi de préférence, pour nos applications, ces deux formes particulières de la fonction ψ, parce qu'elles nous sont imposées en quelque sorte par les équations (6') du n° 37.

3° En supposant le quadrilatère géodésique et la fonction $\psi(\varphi)$ égale à φ, on a le théorème de Gauss, pour le quadrilatère géodésique; ensuite, en supposant un côté infiniment petit, on retombe sur ce théorème appliqué au triangle géodésique, et on s'élève enfin au cas d'un polygone géodésique quelconque, comme on l'a indiqué au n° 76.

79. *Théorème de M. Bonnet.* — Ce théorème donne l'expression de l'aire sphérique d'un polygone quelconque de n côtés. Il se présente comme une conséquence intuitive de celui de Gauss. En effet, si par les différents points infiniment voisins des côtés du polygone on mène des arcs géodésiques tangents en ces points à ces côtés, l'on obtiendra un polygone géodésique. Si l'on appelle I_i la projection tangentielle d'un angle quelconque de contingence d'un de ces côtés, cet angle sera le supplément de l'angle intérieur correspondant; on aura donc, en appliquant le théorème de Gauss, au polygone ainsi construit, et en appelant A, B, C, D, E,... les angles finis du polygone, le signe $\sum$ s'étendant à tout le contour,

$$\iint \frac{d\omega}{\varpi_0 \varpi_1} = A + B + C + D + E + \ldots - \sum I_i - (n-2)\pi.$$

Ce théorème se démontrerait directement au moyen de la formule (4) du n° 77, en y faisant $\psi(\varphi)$ égale à φ et en passant au cas d'un polygone quelconque, comme on vient de l'indiquer à la fin du numéro précédent.

80. *Théorèmes semblables.* — Les formules que nous avons établies aux n°s 38 et 39 donnent naissance à des théorèmes semblables.

Écrivons la seconde des équations (10) du n° 38, nous au-

rons

$$-\frac{d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi}{\varpi_0 \varpi_1} = d_0 d_1 \varphi + d_1 J + d_0 J_1.$$

Si l'on intègre les deux membres, dans toute l'étendue du quadrilatère limité par les courbes qui ont été définies au commencement du n° 77, on aura

$$-\int\int \frac{d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi}{\varpi_0 \varpi_1} = A + B + C + D - 2\pi + \sum J_1 + \sum J,$$

dans laquelle le terme $\sum J$ est la somme des projections tangentielles des angles de contingence inclinée des deux côtés opposés du quadrilatère formé par quatre lignes coordonnées, et $\sum J_1$ est la somme des projections des angles de contingence inclinée des deux autres côtés opposés. De là on déduit :

Théorème. — *Dans un quadrilatère formé par les deux lignes d'une série d'un système de coordonnées, coupées par deux autres lignes de l'autre série, la somme des angles, augmentée de la somme des projections tangentielles des angles de contingence inclinée des quatre côtés par rapport aux courbes de la série qui coupent ces côtés, est supérieure ou inférieure à* 360 *degrés, et l'aire sphérique du quadrilatère égale la différence.*

Si nous écrivons la formule

$$\frac{2\, d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi}{\varpi_0 \varpi_1} = d_1 (I - J) + d_0 (I_1 - J_1),$$

et que nous intégrions, nous obtiendrons, en représentant par $2U'$ l'intégrale double du premier membre,

$$2U' = \sum I_1 + \sum I - \sum J_1 - \sum J,$$

ou bien

$$2U' = \int_{\rho^{[0]}}^{\rho^{[1]}} \frac{d\sigma_1}{R_1} + \int_{\rho_1^{(0)}}^{\rho_1^{[1]}} \frac{d\sigma}{R} - \int_{\rho^{[0]}}^{\rho^{[0]}} \frac{d\sigma_1}{L_1} - \int_{\rho_1^{(0)}}^{\rho_1^{(0)}} \frac{d\sigma}{L},$$

chaque intégrale s'étendant aux deux côtés opposés du quadrilatère.

Cette équation donne

THÉORÈME. — *Le double de l'aire sphérique d'un quadrilatère formé par quatre lignes coordonnées est la somme des projections tangentielles des angles de contingence propre diminuée de la somme des projections tangentielles des angles de contingence inclinée des côtés du quadrilatère.*

Il est bon de remarquer que, dans ces différentes formules, une somme telle que $\sum I_1$ dépend d'une intégrale de la forme $\int \frac{d\sigma}{R_1}$, qui est connue en fonction de ρ, ρ_1 dans chaque système des coordonnées; or il peut se faire que quelques-unes de ces intégrales viennent à s'annuler par la nature du système ou bien par celle du contour que l'on considère. Ainsi le théorème de Gauss pourra exister pour d'autres polygones que les polygones géodésiques.

81. *Conséquences des théorèmes précédents.* — Appliquons les théorèmes précédents à quelques exemples : 1° Considérons un polygone de n côtés a, b, c,... formés d'arcs de courbes à aire maximum. Nous verrons plus loin que ces courbes sont caractérisées par cette condition que leur courbure tangentielle est constante. Soient $\frac{1}{\mathcal{A}}$, $\frac{1}{\mathcal{B}}$,... les courbures tangentielles des côtés a, b, c,..., le théorème du n° 79 donnera

$$U' = A + B + C + \ldots - \left(\frac{a}{\mathcal{A}} + \frac{b}{\mathcal{B}} + \frac{c}{\mathcal{C}} + \ldots\right) - (n-2)\pi.$$

Dans le cas général d'un polygone formé d'arcs de courbes quelconques, ce même théorème aura lieu, pourvu que $\frac{1}{\mathcal{A}}$, $\frac{1}{\mathcal{B}}$,... représentent les courbures moyennes des côtés a, b, c,....

2° Si la surface devient une sphère, la formule du n° 79 donne l'aire du polygone tracée sur la surface. Si le polygone est formé d'arcs de grands cercles qui sont les lignes géodésiques de cette surface, on trouve le théorème connu sur l'aire de ce polygone.

3° Si la surface est un plan, ou une surface développable, on obtient une relation entre les angles du polygone et la somme des projections tangentielles des angles de contingence des côtés de ce polygone, dans le cas où ces côtés sont des arcs de courbes quelconques; si ces arcs appartiennent à des lignes géodésiques, on retrouve la relation qui existe entre la somme des angles d'un polygone plan et rectiligne, et le nombre des côtés.



LIVRE II.

APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES A L'ÉTUDE PARTICULIÈRE DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

CHAPITRE PREMIER.

DES LIGNES QUI DÉPENDENT DES PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS DU PREMIER ORDRE.

§ I. — DES BISSECTRICES.

82. *Des lignes bissectrices des angles d'un système coordonné.* — On appelle ainsi les lignes qui, en un point quelconque, coupent l'angle d'un système coordonné, ou l'angle supplémentaire, en deux parties égales. Il y a donc deux lignes bissectrices, l'une, de l'angle intérieur, et l'autre, de l'angle extérieur du système.

Équations différentielles. — Si l'on appelle α, β les angles de la première ligne, et α_1, β_1 les angles que la seconde ligne fait avec les deux lignes coordonnées; ds, $d\sigma$, $d\sigma_1$ l'élément d'arc de la première ligne, et les éléments des lignes coordonnées correspondants; ∂s, $\partial\sigma$, $\partial\sigma_1$ les quantités analogues de la seconde, on a les équations pour la première et pour la seconde

$$(1) \qquad \alpha = \beta, \quad \alpha_1 = \pi + \beta_1.$$

D'après cela, les équations (1) du n° 44 donnent pour équation différentielle des deux courbes

$$(2) \qquad d\sigma = d\sigma_1, \quad \partial\sigma = -\partial\sigma_1.$$

Les différentielles des arcs sont

$$(3) \qquad ds = 2\,d\sigma\cos\alpha, \quad \partial s = 2\,\partial\sigma\cos\alpha_1.$$

Rayons de courbure tangentielle. — Soient P et P_1 les rayons de courbure tangentielle des courbes ds, ∂s; l'on a, en faisant usage des formules (5) du n° 46,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{4\cos\alpha}{P} &= -\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right) + \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L_1}\right), \\ \frac{4\cos\alpha_1}{P_1} &= -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) + \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1}\right); \end{aligned} \right.$$

desquelles on déduit

$$\frac{\cos\alpha}{P} - \frac{\sin\alpha}{P_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{R}\right) \quad (2).$$

Si l'angle φ est constant, les équations (4) deviennent

$$\frac{2\cos\alpha}{P} = -\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}, \quad \frac{2\sin\alpha}{P_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

Dans tous ces cas, le principe des moyennes harmoniques donne la construction des rayons de courbure tangentielle P, P_1.

Angles de contingence géodésique. — Les formules (5′) du n° 47 prouvent qu'en un point, on a

$$\frac{ds}{P} = \frac{\partial s}{P_1},$$

c'est-à-dire que les angles de contingence tangentielle des deux courbes bissectrices sont égaux.

Système orthogonal. — Les deux courbes bissectrices forment un système orthogonal. Les courbes de la première série et les courbes de la seconde s'obtiennent, les premières par la variation du paramètre constant introduit par l'intégration de la première équation différentielle, et les secondes par la variation du paramètre constant introduit par l'intégration de la seconde équation différentielle. Le système de ces courbes partage harmoniquement le système des lignes coordonnées.

83. **Problème I.** — *Bissectrices des angles du système donné par les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.*

L'équation de l'hyperboloïde à une nappe est, en coordonnées cartésiennes,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

les équations des deux génératrices sont

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\rho\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\rho_1\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

ρ et ρ_1 étant les deux paramètres variables; on en déduit

$$\frac{x}{a}=\frac{1-\rho\rho_1}{1+\rho\rho_1},\quad \frac{y}{b}=\frac{\rho+\rho_1}{1+\rho\rho_1},\quad \frac{z}{c}=\frac{\rho_1-\rho}{1+\rho\rho_1}.$$

Si l'on différentie d'abord par rapport à ρ, et ensuite par rapport à ρ_1, on trouve

$$\frac{dx}{d\rho}=-2a\frac{\rho_1}{(1+\rho\rho_1)^2},\quad \frac{dy}{d\rho}=b\frac{1-\rho_1^2}{(1+\rho\rho_1)^2},\quad \frac{dz}{d\rho}=-c\frac{1+\rho_1^2}{(1+\rho\rho_1)^2};$$

$$\frac{dx}{d\rho_1}=-2a\frac{\rho}{(1+\rho\rho_1)^2},\quad \frac{dy}{d\rho_1}=b\frac{1-\rho^2}{(1+\rho\rho_1)^2},\quad \frac{dz}{d\rho_1}=c\frac{1+\rho^2}{(1+\rho\rho_1)^2}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$K^2=\frac{(a^2-b^2)+(a^2+c^2)}{b^2+c^2},\quad F(\rho)=\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{1+2K^2\rho^2+\rho^4},$$

l'on a

$$d\sigma=\frac{F(\rho)\,d\rho}{(1+\rho\rho_1)^2},\quad d\sigma_1=\frac{F(\rho_1)\,d\rho_1}{(1+\rho\rho_1)^2};$$

les équations différentielles des bissectrices seront

$$\frac{d\rho}{\sqrt{1+2K^2\rho^2+\rho^4}}=\pm\frac{d\rho_1}{\sqrt{1+2K^2\rho_1^2+\rho_1^4}};$$

c'est l'équation de Lagrange, elle s'intègre par les procédés connus. Son intégrale est, en appelant A la constante de l'intégration,

$$\sqrt{1+2K^2\rho^2+\rho^4}+\sqrt{1+2K^2\rho_1^2+\rho_1^4}=(\rho_1-\rho)\sqrt{A}+(\rho_1+\rho)^2.$$

Cette équation se décompose en deux, en appelant 2μ et $2\mu_1$ les deux paramètres variables, l'on a

$$\mu = \frac{\rho_1^2\rho^2 + K^2(\rho^2+\rho_1^2) + 1 + \sqrt{(1+2K^2\rho^2+\rho^4)(1+2K^2\rho_1^2+\rho_1^4)}}{(\rho_1-\rho)^2},$$

$$\mu_1 = \frac{\rho_1^2\rho^2 + K^2(\rho^2+\rho_1^2) + 1 - \sqrt{(1+2K^2\rho^2+\rho^4)(1+2K^2\rho_1^2+\rho_1^4)}}{(\rho_1-\rho)^2}.$$

Si maintenant l'on passe au système cartésien, on trouve le système de lignes de courbure déterminé sur la surface de l'hyperboloïde à une nappe par les intersections d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde à deux nappes, homofocaux.

§ II. — Des lignes harmoniques.

84. *Des lignes conjuguées harmoniques à rapport constant.* — Lorsque deux lignes ds, ∂s sont tracées sur la surface, de telle sorte que les rapports des sinus des angles qu'elles forment avec les lignes coordonnées soient égaux et de signes contraires, ces lignes sont dites *conjuguées harmoniques* par rapport aux lignes coordonnées; et si la valeur absolue du rapport reste invariable d'un point à un autre, elles sont conjuguées harmoniques à rapport constant.

Équation différentielle. — Si l'on conserve la notation du n° 82, et qu'on suppose m constant, l'on a les conditions

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = m, \quad \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1} = -m,$$

desquelles on déduit les équations différentielles des courbes harmoniques

$$d\sigma = m\,d\sigma_1, \quad \partial\sigma = -m\,\partial\sigma_1.$$

On trouve, pour les différentielles des arcs, les expressions suivantes :

$$ds = d\sigma_1\sqrt{1+m^2+2m\cos\varphi}, \quad \partial s = \partial\sigma_1\sqrt{1+m^2-2m\cos\varphi}.$$

Le rayon de courbure tangentielle P de la première est

donné par la formule

$$\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha}\frac{1}{P}=\left(\frac{\cos\beta}{R_1}-m\frac{\cos\alpha}{L_1}\right)-m\left(m\frac{\cos\alpha}{R}-\frac{\cos\beta}{L}\right),$$

et on obtient le rayon de courbure tangentielle P_1 de la seconde, en changeant dans celle-ci P en P_1, α en α_1, β en β_1, et en changeant le signe de m.

Systèmes conjugués harmoniques. — Lorsqu'on aura intégré les deux équations différentielles, en représentant par μ, μ_1 les deux constantes introduites par l'intégration; le système des courbes μ, μ_1 sera un système de lignes coordonnées qui sera coupé harmoniquement sous le rapport constant m, par les lignes ρ, ρ_1. On a donc deux systèmes coordonnés qui sont conjugués harmoniques, l'un par rapport à l'autre, sous rapport constant.

Si m était une fonction donnée des coordonnées du point ρ, ρ_1, les équations précédentes, à l'exception de celles qui se rapportent au rayon de courbure, auraient encore lieu.

85. Problème II. — *Conjuguées harmoniques d'un système de coordonnées de la surface héliçoïdale.*

Si l'on représente par t la projection du rayon vecteur mené d'un point fixe à un point de cette surface sur le plan des xy, et par θ l'angle que fait cette projection avec la droite fixe ox, les équations de la surface héliçoïdale sont

$$x=t\cos\theta,\qquad y=t\sin\theta,\qquad z=a\theta+\psi(t).$$

On déduit

$$\frac{dx}{d\theta}=-t\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=t\cos\theta,\quad \frac{dz}{d\theta}=a;$$
$$\frac{dx}{dt}=\cos\theta,\quad \frac{dy}{dt}=\sin\theta,\quad \frac{dz}{dt}=\psi'(t),$$

et conséquemment

$$d\sigma^2=(t^2+a^2)\,d\theta^2,\quad d\sigma_1^2=\{1+[\psi'(t)]^2\}\,dt^2,$$
$$d\sigma\,d\sigma_1\cos\varphi=a\psi'(t)\,d\theta\,dt.$$

Les équations différentielles des deux lignes conjuguées harmoniques du système $\theta = \rho$, $t = \rho_1$ seront donc

$$d\theta = \pm m \sqrt{\frac{1 + [\psi'(t)]^2}{a^2 + t^2}} dt,$$

le signe + se rapportant à la ligne intérieure et le signe — à la ligne extérieure par rapport à l'angle φ des lignes coordonnées. Les équations de ces lignes sont, μ, μ_1 étant les constantes de l'intégration,

$$\mu = \theta - m \int \frac{\sqrt{1 + [\psi'(t)]^2}}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt, \quad \mu_1 = \theta + m \int \frac{\sqrt{1 + [\psi'(t)]^2}}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt,$$

et l'on voit que, si le rapport m, au lieu d'être constant, était une fonction de t, ce qui revient à dire qu'il ne changerait pas sur la ligne coordonnée $t = \rho_1$, la question ne dépendrait encore que des quadratures. Il en serait de même si le rapport m était le produit de deux fonctions, l'une de θ et l'autre de t exclusivement.

Héliçoïde gauche à plan directeur. — Dans ce cas, $\psi(t)$ est constant, ce qui entraîne la condition $\psi'(t) = 0$; de plus, l'angle des coordonnées φ est droit; on a donc

$$d\theta = \pm \frac{m dt}{\sqrt{a^2 + t^2}},$$

dont les intégrales sont, μ et μ_1 étant les constantes de l'intégration,

$$t = \frac{1}{2}\left[e^{\left(\frac{\theta - \mu}{m}\right)} - a^2 e^{-\left(\frac{\theta - \mu}{m}\right)}\right],$$

$$t = \frac{1}{2}\left[e^{-\left(\frac{\theta + \mu_1}{m}\right)} - a^2 e^{\left(\frac{\theta + \mu_1}{m}\right)}\right].$$

Remarque. — Les équations de la surface héliçoïdale peuvent être mises sous une autre forme qui nous sera utile. Soient v, w des fonctions de t; n et a des constantes; l'on a

$$x = t \cos n(\theta + v), \quad y = t \sin n(\theta + v), \quad z = na(\theta + v) + w.$$

Il est évident qu'elle représente, comme la précédente, la

même surface héliçoïdale, puisque l'élimination de $\theta + v$ dans ces trois dernières et de l'angle θ dans les trois premières conduit au même résultat suivant :

$$z = a \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right) + \Psi(x^2 + y^2).$$

Rectification des harmoniques. — Dans le cas général, les éléments des arcs des deux lignes harmoniques sont donnés par la double expression

$$ds = \frac{\sqrt{(1 + m^2)(t^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}} \pm 2m\psi'}}{\sqrt{t^2 + a^2}}\, dt,$$

le signe + se rapportant à la première et le signe — à la seconde des deux conjuguées.

§ III. — Des trajectoires orthogonales de l'une des deux lignes coordonnées.

86. La trajectoire orthogonale de l'une des deux lignes coordonnées est celle qui coupe toutes les lignes d'une série (ρ) des lignes coordonnées sous un angle droit.

Équations différentielles. — Soit ds l'élément de la courbe qui coupe la ligne $d\sigma$ orthogonalement ; la projection du premier de ces éléments sur la direction du second devant être nulle, on a l'équation

$$d\sigma + \cos\varphi \, d\sigma_1 = 0;$$

de là résulte cette règle que, si, dans l'expression générale de ds^2,

$$ds^2 = d\sigma_1^2 + d\sigma^2 + 2\cos\varphi \, d\sigma \, d\sigma_1,$$

l'on regarde $d\sigma$ comme une variable, la dérivée de ds par rapport à $d\sigma$ doit être nulle.

La différentielle de l'arc est

$$ds = d\sigma_1 \sin\varphi.$$

Si l'on remarque que l'angle α est égal à $\frac{\pi}{2}$, et que $\beta = \varphi - \frac{\pi}{2}$,

la seconde des équations (5) du n° 46 donne

$$\frac{\sin\varphi}{P} = \frac{\cos\varphi}{R} - \frac{1}{L_1} = -\left(\frac{\cos\varphi}{L} + \frac{1}{L_1}\right) = -\frac{1}{\lambda_1} \quad (\text{n}^\circ\ 32),$$

laquelle fait connaître le rayon de courbure tangentielle P.

Système complémentaire. — Si l'on cherche les trajectoires orthogonales de l'autre série de lignes coordonnées, et qu'on représente par ∂s, $\partial \sigma$, $\partial \sigma_1$ les éléments de la trajectoire et des lignes coordonnées, l'on aura l'équation différentielle

$$\partial \sigma_1 + \cos\varphi\, \partial \sigma = 0.$$

Si l'on intègre les équations différentielles des deux trajectoires et qu'on représente par μ, μ_1 les deux constantes de l'intégration, le système des courbes μ, μ_1 sera un système de lignes coordonnées, complémentaire du précédent, et les deux lignes formeront entre elles le même angle.

Les systèmes formés, le premier des deux lignes ρ_1 et μ et le second des deux lignes ρ et μ_1 seront orthogonaux.

87. Problème III. — *Trajectoire orthogonale d'un système de lignes coordonnées de la surface conoïdale.*

La surface conoïdale est celle qui est engendrée par une courbe plane, pendant qu'une droite fixe, située dans son plan, décrit un conoïde. En conservant les notations du n° 85, l'on a

$$x = t\cos\theta, \quad y = t\sin\theta, \quad z = f(\theta) + \psi(t).$$

L'équation aux différences partielles de la surface est, en représentant par p, q, r, s, u les dérivées premières et secondes de z par rapport à x et à y,

$$y^2 r + x^2 u - xys - qy - px = 0.$$

Si l'on prend les différentielles complètes de x, y, z par rapport aux variables θ et t, qu'on élève au carré et qu'on ajoute, l'on obtient

$$ds^2 = (1 + \psi'^2)\, dt^2 + (t^2 + f'^2)\, d\theta^2 + 2f'\psi'\, dt\, d\theta;$$

si l'on veut obtenir la trajectoire orthogonale de la série $d\sigma_1$ des lignes coordonnées $\theta = \rho =$ const., il faut poser, d'après

la règle (**86**),

$$\{1 + [\psi'(t)^2]\} dt + f'(\theta)\psi'(t) d\theta = 0;$$

si l'on divise les deux membres par $\psi'(t)$, on obtient

$$\frac{dt}{\psi'(t)} + \psi'(t) dt + f'(\theta) d\theta = 0,$$

donc l'intégrale est

$$\int \frac{dt}{\psi'(t)} + \psi(t) + f(\theta) = \mu,$$

μ étant la constante introduite par l'intégration.

Surface héliçoïdale. — Pour passer au cas de la surface héliçoïdale, il faut poser $f(\theta) = a\theta$, a étant une constante; cette dernière équation devient

$$\int \frac{dt}{\psi'(t)} + \psi(t) + a\theta = \mu.$$

Si l'on veut obtenir la trajectoire orthogonale de l'autre série des lignes coordonnées, il faut poser

$$d\theta + \frac{a\psi'(t)\, dt}{(a^2 + t^2)} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad \theta + a \int \frac{\psi'(t)\, dt}{(a^2 + t^2)} = \mu_1.$$

Proposons-nous de rapporter un point quelconque de cette surface, au système orthogonal t et μ_1, et d'exprimer la valeur de ds en fonction de ces deux coordonnées.

L'équation précédente donne

$$d\theta = d\mu_1 - a \frac{\psi'(t)\, dt}{(a^2 + t^2)};$$

il faut porter cette valeur dans l'expression de ds^2 se rapportant au système t et θ, laquelle, d'après ce que nous avons écrit plus haut, est

$$ds^2 = (1 + \psi'^2)\, dt^2 + (a^2 + t^2)\, d\theta^2 + 2a\psi'\, d\theta\, dt;$$

on obtient ainsi

$$(2) \qquad ds^2 = (t^2 + a^2)\, d\mu_1^2 + \frac{a^2 + t^2 + t^2\psi'^2}{a^2 + t^2}\, dt^2,$$

laquelle ne renferme pas le double produit $d\mu_1\, dt$, comme cela devait être. Nous reviendrons plus tard sur cette expression, pour en tirer une conséquence remarquable.

Pour obtenir dans le cas de la surface héliçoïdale la valeur de l'élément ds de la trajectoire orthogonale de l'arc $d\sigma$, il faut faire usage de la formule

$$ds = d\sigma_1 \sin\varphi,$$

laquelle donne

$$ds = dt\, \frac{\sqrt{a^2 + t^2 + t^2\psi'^2}}{\sqrt{a^2 + t^2}};$$

la rectification de la trajectoire ne dépend donc que des quadratures.

§ IV. — Des trajectoires sous angle donné de l'une des deux lignes coordonnées.

88. *Équation différentielle.* — Conservons les mêmes notations que dans le n° 82. Soit α l'angle donné sous lequel ds doit couper $d\sigma$; en exprimant que la projection ds est égale à la somme des projections de $d\sigma$ et de $d\sigma_1$ sur la direction de $d\sigma$, l'on a

$$d\sigma + \cos\varphi\, d\sigma_1 = \cos\alpha\, ds,$$

ou bien

$$\tang\alpha = \frac{\sin\varphi\, d\sigma_1}{d\sigma + \cos\varphi\, d\sigma_1};$$

ou bien

$$(\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi)\, d\sigma_1 + \sin\alpha\, d\sigma = 0,$$

qui est l'équation différentielle de la courbe.

La différentielle de l'arc est

$$ds = \frac{d\sigma_1}{\cos(\varphi - \alpha)} + \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}\, d\sigma.$$

Rayon de courbure tangentielle. — Lorsque l'angle α est constant, la seconde des équations (5) du n° 46 donne

$$-\frac{\sin\varphi}{P}=\frac{\sin\beta}{R}+\frac{\sin\alpha}{L_1},$$

laquelle donne la construction du rayon de courbure tangentielle P.

Trajectoires conjuguées. — Considérons deux trajectoires $ds, \partial s$, la première sous l'angle variable α, la seconde sous l'angle variable α_1 de la ligne coordonnée $d\sigma$; les angles α et α_1 étant liés entre eux par la relation

$$F(\alpha, \alpha_1)=m,$$

m étant une constante; si l'on écrit les deux équations relatives à α et α_1, qui se déduisent de la deuxième des équations (5), n° 46, qu'on multiplie la première par $\frac{dF}{d\alpha}$ et la seconde par $\frac{dF}{d\alpha_1}$, et qu'on ajoute, en ayant égard à la différentielle de la fonction F, l'on a

$$-\sin\varphi\left(\frac{\frac{dF}{d\alpha}}{P}+\frac{\frac{dF}{d\alpha_1}}{P_1}\right)=\frac{1}{R}\left(\frac{dF}{d\alpha}\sin\beta+\frac{dF}{d\alpha_1}\sin\beta_1\right)$$
$$+\frac{1}{L_1}\left(\frac{dF}{d\alpha}\sin\alpha+\frac{dF}{d\alpha_1}\sin\alpha_1\right).$$

Si la relation F se réduit à $\alpha+\alpha'=\frac{\pi}{2}$, l'équation précédente devient

$$-\sin\varphi\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{P_1}\right)=\frac{1}{R}(\sin\beta+\sin\beta_1)+\frac{1}{L_1}(\sin\alpha+\cos\alpha),$$

ou bien

$$-\sin\varphi\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{P_1}\right)=\frac{2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{R}$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{L_1}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Si l'on cherche la condition pour que le terme qui contient la courbure inclinée tangentielle $\frac{1}{L_1}$ disparaisse, il faut intégrer l'équation aux différences partielles

$$\frac{dF}{d\alpha}\sin\alpha + \frac{dF}{d\alpha_1}\sin\alpha_1 = 0,$$

dont l'intégrale est

$$F\left(\frac{\tang\frac{1}{2}\alpha}{\tang\frac{1}{2}\alpha_1}\right) = \text{const.}$$

89. Problème IV. — *Trajectoire sous un angle constant α d'un système de coordonnées curvilignes de la surface héliçoïdale.*

Prenons l'équation, n° 88,

$$d\sigma\sin\alpha - (\cos\alpha\sin\varphi - \sin\alpha\cos\varphi)\,d\sigma_1 = 0.$$

Dans la surface héliçoïdale, l'on a

$$\cos\varphi = \frac{a\psi'}{\sqrt{1+\psi'^2}\sqrt{a^2+t^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{a^2+t^2+t^2\psi'^2}}{\sqrt{1+\psi'^2}\sqrt{a^2+t^2}};$$

conséquemment, l'équation différentielle de la trajectoire sera

$$\sin\alpha\,d\theta = (\cos\alpha\sqrt{a^2+t^2+t^2\psi'^2} - a\sin\alpha\psi')\frac{dt}{a^2+t^2},$$

dans laquelle les variables sont séparées.

Problème V. — *Trajectoire sous angle constant des méridiennes d'une surface de révolution.*

Soit t la distance d'un point quelconque de la surface à l'axe de révolution, θ l'angle qu'elle fait avec un plan fixe passant par l'axe; en prenant θ et t pour coordonnées curvilignes d'un point quelconque de la surface, on a $\theta = \rho$, $t = \rho_1$; soit $z = \psi(t)$ l'équation de la courbe méridienne

$$d\sigma = t\,d\theta, \quad d\sigma_1 = dt\sqrt{1+\psi'^2},$$

l'équation de la trajectoire sera

$$\cot\alpha = \frac{t\,d\theta}{dt\sqrt{1+\psi'^2}},$$

dans laquelle les variables se séparent immédiatement. L'équation précédente étant intégrée, on obtient, μ étant la constante d'intégration,

$$\theta - \mu = \cot\alpha \int \frac{dt}{t}\sqrt{1+\psi'^2}.$$

Si l'on veut rapporter un point quelconque de la surface de révolution aux coordonnées $\mu = \text{const.}$, $t = \text{const.}$, il faut, dans l'expression du déplacement ds exprimé au moyen des coordonnées θ et t, introduire les coordonnées μ et t; or, l'on a

$$ds^2 = t^2\,d\theta^2 + (1+\psi'^2)\,dt^2;$$

l'équation précédente donne

$$d\theta = \cot\alpha\,\frac{dt}{t}\sqrt{1+\psi'^2} + d\mu;$$

substituant dans la précédente, l'on obtient

$$ds^2 = \frac{dt^2}{\sin^2\alpha}(1+\psi'^2) + t^2\,d\mu^2 + 2\cot\alpha\,t\,d\mu\,dt\sqrt{1+\psi'^2}.$$

On a ainsi un système de coordonnées à angle constant. Cette équation serait encore exacte si la trajectoire coupait les courbes méridiennes sous un angle α variable avec la distance t du point à l'axe de révolution. Dans ce système de coordonnées, l'on a

$$d\sigma = t\,d\mu, \quad d\sigma_1 = \frac{\sqrt{1+\psi'^2}}{\sin\alpha}\,dt, \quad \cos\varphi = \cos\alpha.$$

Différentielle de l'aire. — Soit l'aire comprise entre une courbe méridienne, la courbe s et un cercle parallèle, l'on a

$$du = t\sqrt{1+\psi'^2}\,d\theta\,dt,$$

donc

$$u = \int_0^\theta d\theta \int_{t_0}^t t\,dt\sqrt{1+\psi'^2},$$

la limite supérieure se rapportant à la valeur de θ donnée par l'équation de la trajectoire.

PROBLÈME INVERSE. — *L'équation différentielle de la trajectoire sert aussi à résoudre le problème inverse, qui consiste à déterminer la méridienne de la surface de révolution, de telle sorte que la trajectoire sous angle donné se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe suivant une courbe donnée*

$$\theta = F(t).$$

L'équation différentielle de la ligne méridienne est, dans ce cas,

$$\cot\alpha . dz = dt\sqrt{t^2[F'(t)]^2 - \cot^2\alpha},$$

dans laquelle les variables sont aussi séparées.

APPLICATIONS : 1° *Trajectoire sous angle constant* β *des génératrices d'un cône droit.* — Si 2γ représente l'angle du cône, son équation sera

$$t = z \operatorname{tang}\gamma.$$

On obtient, pour l'équation différentielle de la trajectoire,

$$d\theta = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\gamma}\frac{dt}{t},$$

dont l'intégrale est

$$t = \mu e^{\frac{\sin\gamma}{\operatorname{tang}\beta}\theta},$$

μ étant la constante de l'intégration, c'est-à-dire la valeur de t correspondante à θ égale à zéro, et e la base des logarithmes népériens. La longueur de la trajectoire entre t égale à μ et t est

$$s = \frac{t-\mu}{\cos\beta\sin\gamma}.$$

L'aire entre les mêmes limites de t, c'est-à-dire entre un arc de trajectoire, la génératrice et le parallèle qui passe par les extrémités de cet arc, a pour expression

$$u = \frac{\operatorname{tang}\beta}{2\sin^2\gamma}\left(t^2\log\frac{t}{\mu\sqrt{e}} - \mu^2\log\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

De là on déduit que l'aire comprise entre les deux généra-

trices correspondantes à μ et à t et la trajectoire est

$$v = \frac{\tang\alpha}{4\sin^2\gamma}(t^2 - \mu^2).$$

2° *Trajectoire sous angle constant des lignes méridiennes de la surface engendrée par la révolution d'une spirale logarithmique autour d'un axe situé dans son plan.* — La surface de révolution engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe situé dans son plan, lorsqu'on introduit le rayon vecteur τ et l'angle ψ qu'il fait avec l'axe de révolution, a pour équation

$$\tau = f(\psi).$$

Dans cette hypothèse, les différentielles des arcs coordonnés sont

$$d\sigma = \tau\sin\psi\, d\theta, \quad d\sigma_1 = d\psi\sqrt{\tau^2 + [f'(\psi)]^2};$$

or, dans le cas actuel, l'équation de la ligne méridienne est

$$\tau = ae^{m\psi},$$

dans laquelle a et m sont des constantes. L'équation différentielle de la trajectoire sous angle constant sera donc

$$\frac{\tang\alpha}{\sqrt{1+m^2}}\, d\theta = \frac{d\psi}{\sin\psi},$$

dont l'intégrale, en appelant θ_0 la constante introduite par l'intégration, et en représentant par b l'expression $\frac{\tang\alpha}{\sqrt{1+m^2}}$, sera

$$\tang\frac{1}{2}\psi = e^{b(\theta-\theta_0)}.$$

On en déduit

$$\sin\psi = \frac{2}{e^{b(\theta-\theta_0)} + e^{-b(\theta-\theta_0)}}, \quad \cos\psi = \frac{e^{b(\theta-\theta_0)} - e^{-b(\theta-\theta_0)}}{e^{b(\theta-\theta_0)} + e^{-b(\theta-\theta_0)}};$$

donc les coordonnées rectangles x, y, z d'un point quelconque de la trajectoire seront

$$x = 2ae^{m\psi}\frac{\cos(\theta-\theta_0)}{e^{b(\theta-\theta_0)} + e^{-b(\theta-\theta_0)}},$$

$$y = 2ae^{m\psi}\frac{\sin(\theta-\theta_0)}{e^{b(\theta-\theta_0)} + e^{-b(\theta-\theta_0)}},$$

$$z = ae^{m\psi}\frac{e^{b(\theta-\theta_0)} - e^{-b(\theta-\theta_0)}}{e^{b(\theta-\theta_0)} + e^{-b(\theta-\theta_0)}},$$

avec la condition

$$m\psi = 2m\,\text{arc}\left[\text{tang} = e^{b(\theta-\theta_0)}\right].$$

Si l'on appelle S l'arc de la trajectoire compris entre les valeurs τ_0 et τ du rayon vecteur, l'on a

$$S = (\tau - \tau_0)\,\frac{\sqrt{1+m^2}}{m\cos\alpha}.$$

La trajectoire jouit de la propriété suivante : que si l'on conçoit un point M décrivant cette ligne, en même temps un point O' et un plan P mobiles; le premier, en restant sur l'axe de révolution, et le second, en restant constamment perpendiculaire à cet axe, et à des distances de l'origine O de signe contraire, et égales à la distance du point décrivant M de l'origine; si à chaque instant, on joint le point M au point O', la ligne O'M prolongée décrira sur le plan mobile une spirale ayant pour équation sur ce plan

$$t = e^{b(\theta-\theta_0)}.$$

3° *Loxodromie.* — On appelle ainsi la courbe coupant sous un angle constant les cercles méridiens d'une sphère. Cette question est un cas particulier de la précédente, car si l'on suppose $m = 0$, l'équation représente une sphère. L'équation de la trajectoire exprimée par les variables ψ et θ ne change pas de forme, on obtient

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\psi = e^{\text{tang}\,\alpha\,(\theta-\theta_0)},$$

et le théorème précédent conduit à cette propriété curieuse, que si l'on prend la perspective sur la sphère de la spirale plane

$$t = e^{(\theta-\theta_0)\,\text{tang}\,\alpha},$$

située dans un plan tangent, le pôle de la spirale coïncidant avec le point de contact de la sphère et du plan sur lequel la spirale est tracée, la loxodromie est la perspective sphérique de cette spirale logarithmique quand on prend pour centre de perspective l'extrémité du diamètre qui passe par le point de contact.

4° *Trouver la surface de révolution telle, que la trajectoire*

sous angle constant des lignes méridiennes se projette suivant la spirale parabolique sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution. — On a alors

$$t = a\theta^2,$$

a étant une constante. L'équation différentielle de la ligne méridienne est

$$\cot\alpha\, dz = dt\sqrt{\frac{t}{4a} - \cot^2\alpha};$$

et, en intégrant, on obtient la développée de la parabole

$$\frac{\cot^2\alpha}{9a^2}\, z^2 = \left(\frac{t}{a} - 4\cot^2\alpha\right)^3.$$

§ V. — Trajectoire orthogonale d'une courbe donnée.

91. *Équation différentielle de la trajectoire.* — Soient ds, $d\sigma$, $d\sigma_1$ l'élément de la courbe donnée, et ses projections obliques sur les lignes coordonnées; α, β les angles que cet élément fait avec ses deux projections. Soient ∂s, $\partial\sigma$, $\partial\sigma_1$, α_1, β_1 les quantités analogues de la trajectoire. L'aire triangulaire dont les deux éléments ds, ∂s sont deux côtés, donne, d'après le n° 6 du Chapitre I,

$$(1) \qquad ds\,\partial s = \sin\varphi\,(d\sigma\,\partial\sigma_1 - d\sigma_1\,\partial\sigma);$$

on a aussi, d'après le même numéro,

$$(2) \qquad \left(\tang\alpha = \frac{d\sigma_1 \sin\varphi}{d\sigma_1\cos\varphi + d\sigma}, \quad \tang\alpha_1 = \frac{\partial\sigma_1\sin\varphi}{\partial\sigma_1\cos\varphi + \partial\sigma}\right).$$

Or, si l'on exprime que l'angle $\widehat{ds\,\partial s}$ est droit, l'on a

$$\tang(\alpha_1 - \alpha) = 0;$$

ce qui entraîne la condition $1 + \tang\alpha_1 \tang\alpha = 0$; d'après cela, l'on a

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial\sigma_1}{d\sigma_1\cos\varphi + d\sigma} = \frac{-\partial\sigma}{d\sigma\cos\varphi + d\sigma_1}\right. \\ &\qquad = \left.\frac{\partial\sigma_1\, d\sigma - \partial\sigma\, d\sigma_1}{d\sigma^2 + d\sigma_1^2 + 2\, d\sigma\, d\sigma_1 \cos\varphi} = \frac{\partial s}{ds\sin\varphi}\right). \end{aligned} \right.$$

La première de ces trois relations donne l'équation différentielle de la courbe, et les deux autres donnent l'élément de l'arc et sa direction.

Soit l'équation de la courbe proposée, u étant un paramètre,

$$F(\rho, \rho_1) = u,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(4) \qquad \frac{dF}{d\rho} d\rho + \frac{dF}{d\rho_1} d\rho_1 = 0,$$

l'équation différentielle de la trajectoire sera (n° 52)

$$(5) \quad \left(\frac{H_1 \partial\rho_1}{H_1 \frac{dF}{d\rho}\cos\varphi - H\frac{dF}{d\rho_1}} = \frac{H\partial\rho}{H\frac{dF}{d\rho_1}\cos\varphi - H_1\frac{dF}{d\rho}} = \frac{-HH_1\partial u}{K^2}\right),$$

avec la condition

$$\partial u = \frac{dF}{d\rho}\partial\rho + \frac{dF}{d\rho_1}\partial\rho_1.$$

Différentielle de l'arc. — L'équation (1) donne, en ayant égard aux relations du n° 52,

$$K\partial s = \sin\varphi\,\partial u,$$

équation qui fait connaître ∂s au moyen des éléments de la courbe proposée.

Courbure tangentielle. — Le rayon de courbure tangentielle de la trajectoire orthogonale se calcule aussi au moyen de l'équation de la courbe proposée.

Si l'on remarque que l'on a

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \beta_1 = \beta - \frac{\pi}{2},$$

l'équation (7) du n° 49 devient

$$\frac{HH_1 \sin\varphi}{P_1} = -\frac{d}{d\rho_1}(H\sin\alpha) - \frac{d}{d\rho}(H_1\sin\beta);$$

or, en ayant égard aux premières équations (13) du n° 52, on a

$$\frac{HH_1 \sin\varphi}{P_1} = \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{HH_1 \sin\varphi}{K}\frac{dF}{d\rho}\right) - \frac{d}{d\rho}\left(\frac{HH_1 \sin\varphi}{K}\frac{dF}{d\rho_1}\right),$$

laquelle ne dépend que des éléments de la courbe F.

Les quantités K et K_1 (cette dernière se rapportant à la courbe ∂s) sont liées entre elles par la relation

$$\frac{K_1}{K} = -HH_1 \sin\varphi,$$

comme nous l'établirons généralement au paragraphe suivant.

Relations entre les courbures $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{P_1}$. — La formule du n° 88 donne

$$\sin\varphi\left(\frac{1}{P_1} - \frac{1}{P}\right) = \frac{1}{R}(\sin\beta + \cos\beta) + \frac{1}{L_1}(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Système orthogonal. — Pour obtenir les équations relatives à ce système, il faut poser $\varphi = \frac{\pi}{2}$; les équations différentielles de la courbe proposée et de la trajectoire orthogonale sont

$$\frac{dF}{d\rho}d\rho + \frac{dF}{d\rho_1}d\rho_1 = 0,$$

$$\frac{H^2\partial\rho}{\left(\frac{dF}{d\rho}\right)} - \frac{H_1^2\partial\rho_1}{\left(\frac{dF}{d\rho_1}\right)} = 0.$$

La différentielle de l'arc est

$$K\partial s = \partial u.$$

92. Problème VI. — *Trajectoire orthogonale d'une ligne ellipsoïdale.*

Soit l'équation de l'ellipsoïde en coordonnées rectangles

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0,$$

si l'on prend pour lignes coordonnées les intersections de cette surface avec deux séries de surfaces du même degré

homofocales, la première série étant composée d'hyperboloïdes à une nappe, et la seconde d'hyperboloïdes à deux nappes, si l'on représente l'équation de l'ellipsoïde par F (λ), λ, μ, ν étant les trois demi-axes de ces surfaces, et dans chacune d'elles b et c les demi-distances focales des deux sections principales, majeure et moyenne, avec les conditions $\lambda > c > \mu > b > \nu$, les symboles $F(\mu)$, $F(\nu)$ représenteront les deux hyperboloïdes. Or, ces trois équations étant du troisième degré en λ^2, μ^2, ν^2, et composées de la même manière par rapport aux coefficients, il en résulte que les trois racines de chacune d'elles sont les valeurs de λ^2, μ^2, ν^2, correspondantes à un système de valeurs de x, y, z; on a donc les trois équations suivantes, qui résultent des relations qui existent entre les coefficients et les racines d'une équation du troisième degré :

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2, \\ \lambda^2\mu^2\nu^2 = b^2c^2x^2, \\ \lambda^2\mu^2 + \mu^2\nu^2 + \nu^2\lambda^2 = b^2(x^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2) + b^2c^2, \end{cases}$$

desquelles on déduit

$$bcx = \lambda\mu\nu,$$
$$b\sqrt{c^2 - b^2}\,y = \sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)},$$
$$c\sqrt{c^2 - b^2}\,z = \sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}.$$

Si l'on différentie ces équations en regardant λ comme constante, et μ et ν comme variables, l'on aura

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{d\mu}{\mu} + \dfrac{d\nu}{\nu}, \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{\mu\,d\mu}{\mu^2 - b^2} + \dfrac{\nu\,d\nu}{\nu^2 - b^2}, \\ \dfrac{dz}{z} = \dfrac{\mu\,d\mu}{\mu^2 - c^2} + \dfrac{\nu\,d\nu}{\nu^2 - c^2}. \end{cases}$$

Si l'on élève au carré les valeurs de dx, dy, dz et qu'on ajoute, l'on aura

$$(4)\quad ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left[\frac{\mu^2 - \lambda^2}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}\,d\mu^2 + \frac{\nu^2 - \lambda^2}{(\nu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)}\,d\nu^2\right];$$

de là résulte que les équations d'une courbe et de sa trajectoire orthogonale seront dans ce système, en représentant ρ par μ et ρ_1 par ν,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{F}}{d\mu}d\mu + \frac{d\mathrm{F}}{d\nu}d\nu = 0,\\ &\frac{\mu^2-\lambda^2}{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}\frac{\partial\mu}{\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\mu}\right)} - \frac{\nu^2-\lambda^2}{(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}\frac{\partial\nu}{\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\nu}\right)} = 0.\end{aligned}\right.$$

Il résulte de la forme de l'équation de la trajectoire que, si les variables sont séparées dans l'équation différentielle de la courbe donnée, elles seront également séparées dans l'équation de la trajectoire.

Différentielle de l'arc de la trajectoire. — Si l'on remarque que ∂s est la somme des projections de $\partial\sigma, \partial\sigma_1$ sur la direction de $d\sigma$, l'on aura

$$(6)\qquad \partial s = \frac{\frac{d\mathrm{F}}{d\mu}\partial\mu + \frac{d\mathrm{F}}{d\nu}\partial\nu}{\sqrt{\mathrm{H}^2\frac{d\mathrm{F}^2}{d\nu^2} + \mathrm{H}_1^2\frac{d\mathrm{F}^2}{d\mu^2}}}.$$

93. Application. — *Trajectoires orthogonales des courbes cylindro-elliptiques.*

Considérons la série des courbes ellipsoïdales formées par les intersections de l'ellipsoïde λ avec les cylindres semblables dont les axes finis $2\mathrm{A}$ et $2\mathrm{B}$ coïncident en direction avec les axes 2λ, $2\sqrt{\lambda^2-b^2}$ de l'ellipsoïde. Si l'on pose, pour abréger,

$$l^2 = \frac{\mathrm{A}^2b^2c^2(\lambda^2-b^2)}{\mathrm{B}^2\lambda^2(c^2-b^2)+\mathrm{A}^2c^2(b^2-\lambda^2)},$$

l'équation de ces cylindres sera

$$\mu^2\nu^2 + l^2(\mu^2+\nu^2) = \text{const.},$$

dont l'équation différentielle est

$$\frac{\mu\,d\mu}{\mu^2+l^2} + \frac{\nu\,d\nu}{\nu^2+l^2} = 0.$$

D'après cela, l'équation de la trajectoire sera

$$\frac{\nu^2-\lambda^2}{\nu^2-b^2}\,\frac{\nu^2+l^2}{\nu^2-c^2}\,\frac{d\nu}{\nu}=\frac{\lambda^2-\mu^2}{\mu^2-b^2}\,\frac{\mu^2+l^2}{\mu^2-c^2}\,\frac{d\mu}{\mu},$$

dans laquelle les variables sont séparées. Si l'on suppose que les trois demi-axes de l'ellipsoïde sont λ, λ_1, λ_2, et qu'on pose, pour abréger,

$$A_1=\frac{\lambda^2 l^2}{(\lambda^2-\lambda_1^2)(\lambda_2^2-\lambda^2)},$$

$$B_1=\frac{\lambda_1^2(l^2+b^2)}{(\lambda_1^2-\lambda^2)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)},$$

$$C_1=\frac{\lambda_2^2(l^2+c^2)}{(\lambda_2^2-\lambda^2)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)},$$

les méthodes d'intégration des fonctions rationnelles conduisent à l'intégrale suivante :

$$(\mu^2\nu^2)^{A_1}\times[(\nu^2-b^2)(\mu^2-b^2)]^{B_1}\times[(\nu^2-c^2)(\mu^2-c^2)]^{C_1}=\text{const.},$$

laquelle, dans le système cartésien, devient

$$x^{A_1}\,y^{B_1}\,z^{C_1}=\text{const.}$$

94. Cas particuliers. — I. *Trajectoires orthogonales des intersections faites par des plans parallèles à l'un des trois plans principaux de l'ellipsoïde.*

Il suffit de faire, dans les formules que nous venons de trouver, l^2 successivement égal à $-c^2$, $-b^2$, o; on trouve ainsi :

1° Pour les intersections faites par un plan parallèle au plan de la section ellipsoïdale maximum, l'équation

$$\mu^2\nu^2-c^2(\mu^2+\nu^2)=\text{const.},$$

et, pour sa trajectoire orthogonale, l'équation en coordonnées cartésiennes

$$x^{\lambda^2}y^{(b^2-\lambda^2)}=\text{const.};$$

2° Pour les intersections faites par un plan parallèle au plan de la section ellipsoïdale moyenne et leurs trajectoires orthogonales, les équations

$$\mu^2\nu^2-b^2(\mu^2+\nu^2)=\text{const.},\qquad x^{\lambda^2}z^{(\lambda^2-c^2)}=\text{const.};$$

3° Pour les intersections faites par un plan parallèle au plan de la section ellipsoïdale minimum et leurs trajectoires orthogonales, les équations

$$\mu\nu = \text{const.},\quad y^{(b^2-\lambda^2)}\, z^{(\lambda^2-c^2)} = \text{const.}$$

II. *Trajectoires orthogonales des courbes, lieux des points de contact des sphères de rayon constant doublement tangentes à l'ellipsoïde.*

L'équation de ces courbes est

$$(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2) = \text{const.},$$

dont la différentielle est

$$\frac{\mu\, d\mu}{\lambda^2-\mu^2} + \frac{\nu\, d\nu}{\lambda^2-\nu^2} = 0.$$

D'après cela, il suffit de faire $l^2 = -\lambda^2$ dans les formules déjà trouvées n° 93 pour passer du cas général à celui dont il s'agit maintenant; on trouve alors, pour les équations des trajectoires orthogonales,

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \text{const.}$$

avec les conditions

$$\alpha = \frac{\lambda^4}{(\lambda^2-\lambda_1^2)(\lambda^2-\lambda_2^2)},$$

$$\beta = \frac{\lambda_1^4}{(\lambda_1^2-\lambda^2)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)},$$

$$\gamma = \frac{\lambda_2^4}{(\lambda_2^2-\lambda^2)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}.$$

III. *Trajectoires orthogonales des sphéroconiques.* — La sphéroconique est l'intersection d'un ellipsoïde et d'une sphère concentriques. L'équation de la sphéroconique est

$$\mu^2+\nu^2 = \text{const.}$$

Son équation différentielle est

$$\mu\, d\mu + \nu\, d\nu = 0.$$

La comparaison de cette équation et de celle des intersections

cylindro-elliptiques montre qu'il suffit de poser $l^2 = \infty$ dans celle-ci pour obtenir la précédente. D'après cela, l'équation des trajectoires orthogonales sera

$$x^{\frac{\lambda^2}{b^2 c^2}} y^{\frac{\lambda^2 - b^2}{b^2(b^2 - c^2)}} z^{\frac{\lambda^2 - c^2}{c^2(c^2 - b^2)}} = \text{const.}$$

95. *De la trajectoire coupant une des lignes coordonnées sous un angle dont la tangente est dans un rapport donné m avec la tangente de l'angle des lignes coordonnées.*

Équation différentielle de la courbe. — La condition du problème est

$$\operatorname{tang} \alpha = m \operatorname{tang} \varphi;$$

si l'on remplace les sinus par les arcs proportionnels, et le cosinus de l'angle α par sa valeur donnée par les formules (1) du n° 44, on obtient

$$d\sigma_1 \cos\varphi = \frac{m}{1 - m} d\sigma,$$

qui est l'équation différentielle de la courbe.

La différentielle de l'arc s'en déduit :

$$ds = d\sigma_1 \frac{\sqrt{1 + m^2 \sin^2\varphi}}{m}.$$

96. Problème VII. — *Le mouvement d'un plan est déterminé par ces trois conditions : qu'un de ses points parcourt une courbe directrice, que ce plan reste normal à l'élément de cette courbe, et que sa rotation autour de cet élément comme axe est égale à la flexion de cette courbe en ce point; trouver la surface engendrée par une courbe située dans ce plan, et déterminer la trajectoire, d'après la loi précédente, d'une des lignes coordonnées.*

Équations de la surface. — Soient x', y', z' les coordonnées du point M qui parcourt la directrice, v et n les coordonnées d'un point N de la génératrice par rapport à deux axes menés du point M, l'un parallèlement au rayon de courbure de la directrice et l'autre parallèlement à la binormale; soit t la direction de la tangente à la directrice, et $n = f(v)$ l'équa-

tion de la génératrice par rapport aux axes $M\iota$, Mn; soient x, y, z les coordonnées du point N par rapport aux axes Ox', Oy', Oz'. Si l'on projette le périmètre du polygone OMNO sur chacun de ces axes, on aura trois équations renfermées dans le type suivant :

$$(1) \qquad x = x' + \iota\cos(x, r) + f(\iota)\cos(x, n) \quad [3],$$

dans lesquelles x', y', z' sont exprimées en fonction d'une variable v, ainsi que les quantités qui en dépendent; on a donc les trois coordonnées x, y, z exprimées en fonction de deux paramètres ι et v.

Arcs coordonnés. — Si l'on prend la différentielle de l'équation précédente, et que l'on conserve la notation des n°s 19 et 9 du Chapitre I, l'on a

$$\begin{aligned} dx = ds'\cos(t, x) + \iota\, d\vartheta\cos(l, x) + f(\iota)\, d\omega\cos(r, x) \\ + d\iota\cos(r, x) + f'(\iota)\, d\iota\cos(n, x); \end{aligned}$$

si l'on élève au carré les trois équations contenues dans ce type, et qu'on les ajoute, on aura

$$\begin{aligned} ds^2 = ds'^2 + \iota^2 d\vartheta^2 + [d\iota + f(\iota)\, d\omega]^2 + [f'(\iota)]^2 d\iota^2 \\ + 2\iota\, ds'\, d\vartheta\cos(t, l) + 2f'(\iota)\iota\, d\iota\, d\vartheta\cos(n, l). \end{aligned}$$

Or l'on a (n° 9)

$$\cos(t, l) = \frac{d\varepsilon}{d\vartheta}, \quad \cos(n, l) = -\frac{d\omega}{d\vartheta};$$

on obtiendra donc

$$(2) \left\{ \begin{aligned} ds^2 = & \left((ds' + \iota\, d\varepsilon)^2 + \{\iota^2 + [f(\iota)]^2\} d\omega^2\right) \\ & + d\iota^2 \{1 + [f'(\iota)]^2\} + 2[f(\iota) - \iota f'(\iota)]\, d\omega\, d\iota, \end{aligned} \right.$$

et conséquemment

$$d\sigma = \left(\left(\frac{ds'}{dv} + \iota \frac{d\varepsilon}{dv} \right)^2 + \{\iota^2 + [f(\iota)]^2\} \frac{d\omega^2}{dv^2} \right)^{\frac{1}{2}} dv,$$

$$d\sigma' = \{1 + [f'(\iota)]^2\}^{\frac{1}{2}} d\iota,$$

$$d\sigma\, d\sigma' \cos\varphi = [f(\iota) - \iota f'(\iota)] \frac{d\omega}{dv}\, dv\, d\iota.$$

Trajectoire de l'arc $d\sigma'$. — Elle a pour équation différentielle (n° 95)

$$\left(\frac{m}{-1+m}\right)\{1+[f'(\iota)]^2\}d\iota+[f(\iota)-\iota f'(\iota)]\frac{d\omega}{dv}dv=0;$$

dans laquelle les variables se séparent, et qui, étant intégrée, donne

$$\omega-\left(\frac{m}{1-m}\right)\int\frac{\{1+[f'(\iota)]^2\}d\iota}{f(\iota)-\iota f'(\iota)}=\mu,$$

μ étant la constante introduite par l'intégration.

Surfaces moulures. — Ces surfaces sont un cas particulier des surfaces précédentes. Puisque la courbe directrice est plane, il n'y a qu'à poser $d\omega$ nul dans les formules précédentes; l'on obtient

$$d\sigma=\left(\frac{ds'}{dv}+\iota\frac{d\varepsilon}{dv}\right)dv,\quad d\sigma'=\{1+[f'(\iota)]^2\}^{\frac{1}{2}}d\iota,\quad \cos\varphi=0,$$

et alors les coordonnées $d\sigma$, $d\sigma_1$ sont orthogonales. Le plan mobile enveloppe un cylindre qui a pour directrice la développée de la courbe ds' directrice du mouvement, de sorte que les deux courbes coordonnées sont, d'une part la génératrice dans une de ses positions, et de l'autre une courbe parallèle à ds'.

97. *Généralisation.* — On trouvera de la même manière les trajectoires, d'après la même loi, de l'une des lignes coordonnées de la surface engendrée par une courbe située dans le plan osculateur, et ayant une position fixe par rapport à la tangente et à la normale principale, ou bien située dans le plan rectifiant et ayant une position fixe par rapport à la tangente et à la binormale.

Dans le premier cas, $\iota=f(t)$ étant l'équation de la génératrice rapportée à deux axes coïncidant, l'un avec le rayon de courbure et l'autre avec la tangente, les équations de la surface sont données par

$$x=x'+t\cos(t,x)+f(t)\cos(r,x)\quad [3],$$

de laquelle on déduit

$$ds^2 = \left\{ \left[\frac{ds'}{dv} - f(t) \frac{d\varepsilon}{dv} \right]^2 + t^2 \frac{d\varepsilon^2}{dv^2} + [f'(t)]^2 \frac{d\omega^2}{dv^2} \right\} dv^2$$

$$+ \left\{ 1 + [f'(t)]^2 \right\} dt^2 + 2 \left\{ \frac{ds'}{dv} dv + [tf'(t) - f(t)] d\varepsilon \right\} dt.$$

L'équation de la trajectoire d'après la loi donnée de l'arc $d\sigma = \left\{ 1 + [f'(t)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dt$ est

$$\frac{ds'}{d\varepsilon} + [tf'(t) - f(t)] + \left(\frac{m}{1-m} \right) \left\{ 1 + [f'(t)]^2 \right\} \frac{dt}{d\varepsilon} = 0,$$

s' étant une fonction connue de v.

Dans le second cas, $n = f(t)$ étant l'équation de la courbe génératrice rapportée à deux axes coïncidant avec la tangente et la binormale, les équations de la surface sont données par

$$x = x' + t \cos(t, x) + f(t).\cos(n, x) \quad [3],$$

et l'on arrive à l'expression

$$ds^2 = \left\{ \frac{ds'^2}{dv^2} + \left[t \frac{d\varepsilon}{dv} + f(t) \frac{d\omega}{dv} \right]^2 \right\} dv^2$$

$$+ \left\{ 1 + [f'(t)]^2 \right\} dt^2 + 2 \frac{ds'}{dv} dv\, dt;$$

et, par suite, l'équation de la trajectoire d'après la loi donnée est

$$s' + \frac{m}{m-1} \int \left\{ 1 + [f'(t)]^2 \right\} dt = \mu,$$

μ étant la constante introduite par l'intégration.

§ VI. — Trajectoires quelconques d'une courbe donnée.

98. *Équation différentielle.* — Si nous conservons les notations du n° 91 et qu'on représente par φ_1 l'angle sous lequel les deux courbes se coupent, l'on a les conditions

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} \varphi_1 = \dfrac{\operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha_1}, \\ ds \partial s \sin \varphi_1 = \sin \varphi (d\sigma \partial \sigma_1 - d\sigma_1 \partial \sigma). \end{cases}$$

Si dans cette équation l'on porte les valeurs de $\tang\alpha$, $\tang\alpha_1$, et qu'on ordonne par rapport aux éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$, on trouve une première équation et une seconde qui s'en déduit. Ces équations sont

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_1}{d\sigma_1\sin(\varphi_1+\varphi)+d\sigma\sin\varphi_1}=\frac{-\partial\sigma}{d\sigma\sin(\varphi_1-\varphi)+d\sigma_1\sin\varphi_1}\\ &\qquad=\frac{\partial\sigma_1 d\sigma-\partial\sigma d\sigma_1}{ds^2\sin\varphi_1}=\frac{\partial s}{ds\sin\varphi}.\end{aligned}\right.$$

La première de ces équations est l'équation différentielle de la trajectoire, que l'on peut écrire sous la forme suivante (n° 91) :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{H_1\partial\rho_1}{H_1\dfrac{dF}{d\rho}\sin(\varphi_1+\varphi)-H\dfrac{dF}{d\rho_1}\sin\varphi_1}\\ &\qquad=\frac{H\partial\rho}{H\dfrac{dF}{d\rho_1}\sin(\varphi_1-\varphi)-H_1\dfrac{dF}{d\rho}\sin\varphi_1}=\frac{-HH_1\partial u}{K^2\sin\varphi_1}.\end{aligned}\right.$$

Différentielle de l'arc. — La seconde des équations (1) donne, en ayant égard aux relations du n° 52, la relation

$$(4)\qquad K\partial s\sin\varphi_1=\sin\varphi\,\partial u,$$

équation qui fait connaître ∂s au moyen des coefficients de l'équation différentielle de la courbe donnée.

On a aussi

$$(5)\qquad \tang\alpha_1=\frac{H\dfrac{dF}{d\rho_1}\sin\varphi_1-H_1\dfrac{dF}{d\rho}\sin(\varphi+\varphi_1)}{H\dfrac{dF}{d\rho_1}\cos\varphi_1-H_1\dfrac{dF}{d\rho}\cos(\varphi+\varphi_1)},$$

laquelle fait connaître la tangente de l'angle de l'élément de la courbe avec les lignes coordonnées en fonction des données de la question.

Rayon de courbure tangentielle. — Si l'on remarque que l'on a

$$\alpha_1=\alpha+\varphi_1,\quad \beta_1=\beta-\varphi_1,$$

on obtient

$$\cos\alpha_1 = \frac{d\sigma_1}{ds}\cos(\varphi + \varphi_1) + \frac{d\sigma}{ds}\cos\varphi_1,$$

$$\cos\beta_1 = \frac{d\sigma}{ds}\cos(\varphi_1 - \varphi) + \frac{d\sigma_1}{ds}\cos\varphi_1,$$

et, en ayant égard aux relations du n° 52, on obtient

$$\cos\alpha_1 = \frac{H}{K}\frac{dF}{d\rho_1}\cos\varphi_1 - \frac{H_1}{K}\frac{dF}{d\rho}\cos(\varphi_1 + \varphi),$$

$$\cos\beta_1 = \frac{H}{K}\frac{dF}{d\rho_1}\cos(\varphi_1 - \varphi) - \frac{H_1}{K}\frac{dF}{d\rho}\cos\varphi_1.$$

Donc, si l'on porte ces valeurs dans l'expression du rayon de courbure n° 49, on obtient

$$\frac{HH_1\sin\varphi}{P_1} = \frac{d}{d\rho_1}\left[\frac{H^2}{K}\frac{dF}{d\rho_1}\cos\varphi_1 - \frac{HH_1}{K}\frac{dF}{d\rho}\cos(\varphi_1 + \varphi)\right]$$
$$+ \frac{d}{d\rho}\left[\frac{H_1^2}{K}\frac{dF}{d\rho}\cos\varphi_1 - \frac{HH_1}{K}\frac{dF}{d\rho_1}\cos(\varphi_1 - \varphi)\right],$$

qui fait connaître la courbure $\frac{1}{P_1}$ en fonction des données de la question.

Relations entre les courbures $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{P_1}$. — La formule des courbures du n° 88 donne, lorsque φ_1 est constant,

$$\alpha_1 - \alpha = \text{const.},$$

$$\sin\varphi\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P_1}\right) = \frac{1}{R}(-\sin\beta + \sin\beta_1) + \frac{1}{L_1}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha).$$

Relations entre les éléments K *et* K_1 *des deux courbes* ds, ∂s. — Soit

$$M\partial\rho + M_1\partial\rho_1 = 0,$$

l'équation différentielle de la trajectoire, l'on a, d'après les équations (3),

$$\frac{M}{H} = H_1\frac{dF}{d\rho}\sin(\varphi_1 + \varphi) - H\frac{dF}{d\rho_1}\sin\varphi_1,$$

$$\frac{M_1}{H_1} = -H\frac{dF}{d\rho_1}\sin(\varphi_1 - \varphi) + H_1\frac{dF}{d\rho}\sin\varphi_1;$$

or les équations du n° 52 donnent

$$\frac{d\sigma}{H\frac{dF}{d\rho_1}} = -\frac{d\sigma_1}{H_1\frac{dF}{d\rho}} = \frac{ds}{K}, \quad \frac{\partial\sigma}{HM_1} = -\frac{\partial\sigma_1}{H_1M} = \frac{\partial s}{K_1},$$

K_1 se composant par rapport à M et M_1 comme K se compose par rapport à $\frac{dF}{d\rho}$, $\frac{dF}{d\rho_1}$.

La deuxième des équations (1) du présent numéro donne

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi} = -\frac{HH_1}{KK_1}\left(\frac{dF}{d\rho_1}M - \frac{dF}{d\rho}M_1\right).$$

Si l'on a égard aux valeurs de M, M_1 trouvées ci-dessus, on obtient

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi} = -HH_1\frac{K}{K_1}.$$

Telle est la relation que nous voulions établir.

De là résulte que si $u_1 =$ const. est l'intégrale de l'équation différentielle (3) et λ son facteur d'intégration, l'on a l'équation

$$\lambda K_1 ds \sin\varphi = \sin\varphi_1 du_1,$$

donc l'on a aussi

$$\lambda KK_1 ds\partial s = \partial u du_1, \qquad -\lambda K^2HH_1\sin\varphi = \sin\varphi_1\frac{\partial u}{\partial s}\frac{du_1}{ds},$$

qui sont des relations utiles dans le problème des trajectoires.

99. Problème VIII. — *Étant donnée sur la surface héliçoïdale une courbe rapportée aux coordonnées θ et t (n° 85), et de la forme*

$$\theta + \mu = f(t),$$

dans laquelle μ est une constante, trouver l'équation de la trajectoire sous l'angle φ_1.

Il faut faire usage de l'équation (3) du n° 98, en remarquant que dans le cas actuel on a

$$H = \sqrt{a^2+t^2}, \quad H_1 = \sqrt{1+\psi'^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{a\psi'}{\sqrt{(a^2+t^2)(1+\psi'^2)}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{a^2+t^2(1+\psi'^2)}}{\sqrt{(a^2+t^2)(1+\psi'^2)}},$$

et

$$\frac{dF}{d\rho} = 1, \quad \frac{dF}{d\rho_1} = -f'(t),$$

on trouve pour équation différentielle de la trajectoire

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{f'(t)\left[a\psi'\sin\varphi_1 - \cos\varphi_1\sqrt{a^2 + t^2(1+\psi'^2)}\right] + (1+\psi'^2)\sin\varphi_1}{\left[a\psi'\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1\sqrt{a^2 + t^2(1+\psi'^2)}\right] + (a^2+t^2)f'(t)\sin\varphi_1} = 0,$$

dans laquelle les variables sont aussi séparées.



CHAPITRE II.

DES LIGNES QUI NE DÉPENDENT QUE DES COURBURES NORMALES DES LIGNES COORDONNÉES.

§ I. — DES LIGNES ASYMPTOTIQUES.

100. *Des lignes asymptotiques.* — On appelle ainsi les lignes tracées sur une surface telles, qu'en un quelconque de leurs points la composante normale de la courbure est nulle. La recherche des lignes asymptotiques conduit généralement à une équation différentielle du premier ordre et du second degré; mais cette équation peut se simplifier, lorsque, la surface renfermant une famille de lignes asymptotiques connue, telles que des génératrices rectilignes, on fait entrer cette famille dans le système des coordonnées curvilignes dont on fait usage.

Équation différentielle. — Si l'on pose la condition qu'une courbe ds a sa courbure normale nulle, l'équation (1) du n° 54 devient

$$(1)\qquad \frac{d\sigma^2}{r} + \frac{2\,d\sigma\,d\sigma_1}{t} + \frac{d\sigma_1^2}{r_1} = 0,$$

qui est l'équation différentielle de la courbe du premier ordre et du second degré.

Si l'une des courbes coordonnées $\rho = \text{const.}$ est asymptotique, l'autre courbe étant quelconque, la courbure $\frac{1}{r_1}$ est nulle, et l'équation précédente devient

$$(2)\qquad d\sigma\left(\frac{d\sigma}{r} + \frac{2\,d\sigma_1}{t}\right) = 0.$$

Cette équation se compose de deux facteurs : le premier,

égalé à zéro, donne le système, déjà connu, $\rho = \text{const.}$; l'équation de l'autre ligne asymptotique est donc

$$\frac{d\sigma}{r} + \frac{2\,d\sigma_1}{l} = 0. \tag{3}$$

101. Problème I. — *Étant donnée une surface réglée, trouver tous les systèmes de lignes asymptotiques.*

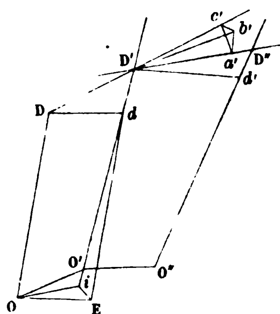
Équations de la surface réglée. — La surface réglée est engendrée par le mouvement d'une ligne droite dont un point parcourt une courbe donnée. D'après cela, les coordonnées x', y', z' de ce point, par rapport à trois axes rectangulaires fixes, sont des fonctions d'un certain paramètre ρ, et les cosinus des angles de la droite avec les mêmes axes sont fonctions du même paramètre. Soit t la distance du point qui parcourt la courbe directrice à un point quelconque (x, y, z) de la ligne génératrice, les équations de la surface sont données par les trois équations renfermées dans le type

$$x = x' + t\cos(t, x) \quad [3], \tag{4}$$

dans lesquelles les variables indépendantes sont ρ et t.

Ligne de striction. — Si l'on détermine sur chaque génératrice rectiligne le pied de la perpendiculaire commune à cette génératrice et à celle infiniment voisine, le lieu des pieds de ces perpendiculaires est la ligne de striction.

Fig. 10.



Soit Dd (*fig.* 10) la perpendiculaire commune aux deux gé-

nératrices OD, O′D′, et D′d' la perpendiculaire commune infiniment voisine; DD′ est la différentielle ds' de l'arc de la ligne de striction; OE est prise égale et parallèle à Dd; i est la projection de E sur la génératrice O′D′; posons OD égale à t', et projetons le périmètre du quadrilatère OD D′O′ successivement sur les trois directions Ot, Or, On, on aura

$$ds' \cos(t, ds') = ds \cos(t, ds) + dt',$$
$$ds' \cos(r, ds') = ds \cos(r, ds) + t' d\varepsilon,$$
$$ds' \cos(n, ds') = ds \cos(n, ds);$$

or l'angle (r, ds') ne diffère d'un angle droit que d'un infiniment petit. On a donc

$$(5) \quad \begin{cases} t' = -\dfrac{ds}{d\varepsilon} \cos(r, ds), \\ \operatorname{tang}(t', ds') = \dfrac{ds \cos(n, ds)}{ds \cos(t, ds) + dt'}, \\ ds'^2 = ds^2 \cos^2(n, ds) + [ds \cos(t, ds) + dt']^2. \end{cases}$$

Soient O″D″ une troisième position de t' et D′b' le prolongement de DD′; D′c' sa projection sur le plan tangent O′D′d' à la surface réglée au point D′; ces deux droites forment avec D′D″ un trièdre rectangle, l'angle b'D′a' est l'angle de contingence $d\varepsilon'$ de la courbe, l'angle a' D′ c' est la différence des angles O′D′c', O′D′a'; or O′D′c' est égal à $\pi - (t, ds')$, O′D′a' a pour valeur $\pi - (t, ds') - d(t, ds')$; on a donc a'D′c' égal à $d(t, ds')$. D'une autre part, si l'on remarque que les deux plans tangents à la surface réglée, infiniment voisins le long de la ligne de striction, sont perpendiculaires à Or et à O$r + d$(Or), le plan de l'angle (rOr') de ces deux droites (nº 9) est perpendiculaire à l'intersection des deux plans, c'est-à-dire à Op. En remarquant que l'angle c'D′b' se projette sur l'angle rOr', on a donc

$$c'\mathrm{D}'b' = (r, r') \cos(p, ds') = (t, t') \cos(n, ds') - nn' \cos(t, ds').$$

Cela posé, le triangle rectangle $c'\,b'\,a'$ donne

$$\overline{b'a'}^2 = \overline{c'b'}^2 + \overline{a'c'}^2, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} c'a'b' = \frac{c'b'}{a'c'},$$

on aura donc les deux équations

$$(6)\left\{\begin{aligned} de'^2 &= [(t,t')\sin(t,ds') - (n,n')\cos(t,ds')]^2 + [d(t,ds')]^2,\\ \cot c'a'b' &= -\frac{d(t',ds')}{d\varepsilon\sin(t,ds') + d\omega\cos(t,ds')}. \end{aligned}\right.$$

Les formules (5) font connaître en fonction du paramètre ρ la distance t' du point D, point central, au point correspondant O de la courbe directrice, l'élément ds' de la ligne de striction et l'angle que cet élément fait avec les trois lignes Ot, On, Or. Les formules (6) donnent en fonction du même paramètre l'angle de' de contingence de la ligne de striction et l'angle que le rayon de courbure fait avec les trois directions Ot, On, Or, et, par suite, elles donnent le rayon de courbure $\frac{ds'}{de'} = \mathfrak{R}'$ de cette courbe, ainsi que sa courbure normale $\frac{de'}{ds'}\cos(\mathfrak{R}', r)$.

De là résulte que la ligne de striction est complétement déterminée. Il sera donc toujours possible de prendre la ligne de striction elle-même pour courbe directrice, et c'est ce que nous ferons dans les recherches qui nous occupent; et, dans ce qui va suivre, les équations (4) de la surface réglée se rapporteront à la ligne de striction considérée comme courbe directrice de la ligne droite mobile, et x', y', z' seront les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne.

Équations différentielles des lignes asymptotiques. — Nous admettons la notation suivante, pour rester fidèle à nos conventions (*fig.* 10′) :

$d\varepsilon$ est l'angle de deux génératrices rectilignes infiniment voisines;

dp est leur plus courte distance;

$d\omega$ est l'angle de deux plus courtes distances infiniment voisines;

dq est leur plus courte distance;

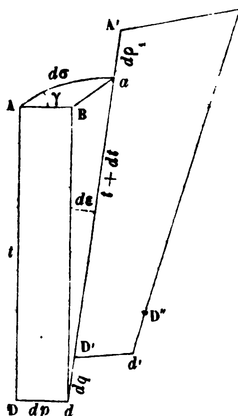
γ est l'angle d'une normale à la surface avec celle menée par le point central pris sur la même génératrice;

$d\theta$ est l'angle de deux normales à la surface menées par deux points centraux infiniment voisins.

Nous prenons pour lignes coordonnées les génératrices

rectilignes et leurs trajectoires orthogonales : les positions des premières dépendent du paramètre ρ, t est la distance de

Fig. 10'.



la ligne orthogonale au point central, $d\rho_1$ la distance de deux lignes orthogonales infiniment voisines. Cela posé, si l'on projette le périmètre du quadrilatère dont les côtés opposés sont $d\sigma$ et dp sur les trois directions de dp, de t et de la normale à ces deux lignes, l'on aura

$$(7)\qquad dp = d\sigma\cos\gamma,\quad t d\varepsilon = d\sigma\sin\gamma,\quad d_\rho t = -dq,$$

desquelles on déduit

$$(8)\qquad t = \rho_1 - q,\quad \operatorname{tang}\gamma = \frac{d\varepsilon}{dp}\,t.$$

Nous représenterons par ζ le rapport $\frac{d\varepsilon}{dp}$. Or, si dans la figure sphérique n° 9, construite en menant des rayons parallèles aux lignes dont il vient d'être question, on mène des rayons parallèles aux normales à la surface menées par les extrémités de $d\sigma$, l'on aura

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\sigma_1}{l} = d_1\gamma, & \dfrac{d\sigma}{l} = -\,d\varepsilon\cos\gamma, \\[2ex] \dfrac{d\sigma_1}{r_1} = 0, & \dfrac{d\sigma}{r} = -\,d\omega + d_0\gamma; \end{cases}$$

d'après cela, l'équation (2) devient

$$(10)\qquad d\sigma(d\omega - d_0\gamma - 2d_1\gamma) = 0;$$

or, si l'on remarque que l'on a, d'après les équations (8),

$$(11)\left\{\frac{d_0\gamma}{d\rho} = \cos^2\gamma\left[(\rho_1 - q)\frac{d\zeta}{d\rho} - \frac{dq}{d\rho}\zeta\right],\quad \frac{d_1\gamma}{d\rho_1} = \zeta\cos^2\gamma\right\},$$

l'équation précédente prendra la forme

$$(12)\qquad \frac{d\omega}{\cos^2\gamma} - \frac{1}{\rho_1}d(\rho_1^2\zeta) + \frac{d_0}{d\rho}(q\zeta)\,d\rho = 0,$$

qui a cet avantage que chacun de ses termes se rapporte à un des éléments de la surface réglée.

102. *De la surface gauche lieu des binormales à une courbe.* — Dans ce genre de surfaces, la plus courte distance dq est nulle; l'équation (12) devient

$$(13)\qquad d(\rho_1^2\zeta) = \rho_1\frac{d\omega}{\cos^2\gamma};$$

or, si l'on élimine γ au moyen des deuxièmes équations (8) et (11), on obtient

$$2\zeta\frac{dt}{d\rho} + \frac{d\zeta}{d\rho}t - \frac{d\omega}{d\rho}(1 + \zeta^2 t^2) = 0,$$

qui est du premier degré par rapport aux variables t et ρ. C'est l'équation d'Euler; elle s'intégrera donc d'une manière générale lorsqu'on connaîtra une solution particulière.

Conoïde droit. — C'est la surface engendrée par une droite t constamment parallèle à un plan et s'appuyant sur une droite perpendiculaire à ce plan et sur une courbe donnée.

Si l'on prend pour directrice rectiligne l'axe des z (système rectiligne orthogonal), et qu'on appelle θ l'angle que la projection de la génératrice fait avec l'axe des x, les équations du conoïde droit sont

$$x = t\cos\theta,\quad y = t\sin\theta,\quad z = f(\theta);$$

l'équation de la ligne asymptotique devient, en remarquant

que $d\varepsilon = d\theta = d\rho$ et que $\zeta = \frac{1}{f'(\theta)}$,

$$d(t^2\zeta) = 0,$$

de laquelle on déduit l'équation de la ligne asymptotique en termes finis

$$t^2 = \mu^2 f'(\theta),$$

μ étant l'intégrale introduite par l'intégration.

Héliçoïde gauche à plan directeur. — C'est le conoïde pour lequel la courbe directrice non rectiligne est une hélice ayant la directrice rectiligne pour axe. Dans ce cas, $f'(\theta)$ est une constante; on a donc $t^2 = \text{const.}$ pour ligne asymptotique, c'est-à-dire, nº 87, la trajectoire à angles droits des génératrices rectilignes.

103. *Surfaces de révolution.* — Examinons maintenant le cas où aucune ligne asymptotique n'entre dans le système des lignes coordonnées, comme cela a lieu généralement dans le système des méridiennes et des parallèles des surfaces de révolution. Si nous conservons la notation employée au nº **89**, nous trouverons pour les rayons des courbures normales des arcs $d\sigma$, $d\sigma_1$ les expressions suivantes :

$$\frac{1}{r} = \frac{\psi'}{t(1+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La première s'obtient en multipliant la courbure $\frac{1}{t}$ du parallèle $d\sigma$ par le cosinus de l'angle de la normale et du rayon du parallèle; la seconde n'est autre que la courbure de la ligne méridienne. Quant à la composante normale de la courbure inclinée de l'arc $d\sigma$, elle est nulle, puisque le plan de cette courbure n'est autre que le plan tangent; on a donc

$$\frac{1}{l} = 0;$$

l'équation différentielle de la courbe sera donc, en représentant par i la racine carrée de moins un [nº 100, form. (1)],

$$d\theta = i\,dt\sqrt{\frac{\psi''}{t\psi'}},$$

c'est l'équation de la projection de la ligne asymptotique sur le plan des xy.

Si l'on demande quelle est la surface dont la ligne asymptotique se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, suivant une spirale logarithmique, il faut poser, m étant une constante,

$$m^2 \frac{dt}{t} + \frac{d\psi'}{\psi'} = 0.$$

Donc la courbe méridienne aura pour équation

$$z + a = ct^{1-m^2},$$

c et a étant des constantes introduites par les deux intégrations successives. Les courbes méridiennes prendront diverses formes suivant les diverses valeurs données à la constante m^2, mais toutes ces courbes resteront comprises dans un type général, dans lequel se trouve l'hyperbole, comme il est facile de le reconnaître.

§ II. — Des lignes dont la courbure normale a la surface est une fonction donnée.

104. *Équation différentielle.* — Cette équation est donnée par la formule (1) du n° **54**, dans laquelle l'élément ds a été exprimé en fonction des éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$ des lignes coordonnées, et dans laquelle $\frac{1}{\pi}$ représente la fonction donnée

$$(1) \quad \begin{cases} d\sigma_1^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\pi}\right) + 2\, d\sigma\, d\sigma_1 \left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{\pi}\right) \\ \qquad\qquad + d\sigma^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\pi}\right) = 0. \end{cases}$$

Surfaces réglées. — Dans le cas de ces surfaces, on trouve, en raisonnant comme au n° **101**,

$$(2) \quad \frac{ds^2}{\pi} = dp \cos\gamma \left[\frac{-\,d\omega}{\cos^2\gamma} + \frac{1}{\rho_1} d(\rho_1^2 \zeta) - d_0(q\zeta)\right].$$

Conoïde droit. — On obtient, en posant dans la formule précédente q et $d\omega$ nuls, et conséquemment $t = \rho_1$, l'équa-

tion différentielle

$$(3) \qquad \frac{ds^2}{\pi} = dp \sin\gamma\, d(\log \rho_1^2 \zeta).$$

PROBLÈME II. — *Cherchons la courbe telle, que la projection de l'angle de contingence sur le plan normal à la surface suivant l'élément de la courbe soit proportionnelle à la projection de la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines sur la normale à la surface au point de la courbe.*

Cette condition exige que l'on ait, k étant une constante,

$$\frac{ds}{\pi} = k\, dp \sin\gamma,$$

ce qui donne l'équation différentielle

$$k\, ds = d \log(\rho_1^2 \zeta),$$

dont l'intégrale est

$$t^2 = \frac{e^{k(s-s_0)}}{\zeta},$$

s_0 étant la constante introduite par l'intégration.

Si l'on cherche la courbe telle, que le rapport des mêmes projections soit proportionnel au sinus de l'angle que la tangente à la courbe fait avec la génératrice, on aura l'équation différentielle dans laquelle a est une constante

$$a\, dt = d \log(t^2 \zeta).$$

Son intégrale est

$$t^2 \zeta = e^{a(t-t_0)},$$

t_0 étant la constante introduite par l'intégration.

Héliçoïde à plan directeur.

PROBLÈME III. — *Trouver la courbe tracée sur l'héliçoïde, telle que la courbure normale de cette courbe reste constante en un point quelconque de cette courbe.*

Il faut introduire dans l'équation différentielle (3) la condition que ζ est une constante b, et que la courbure $\frac{1}{\pi}$ est égale

à une constante $\frac{1}{a}$; on obtient l'équation différentielle suivante entre θ et γ

$$bd\theta - a\cos\gamma d\gamma \pm d\gamma\sqrt{a^2\cos^2\gamma - \frac{1}{b^2\cos^2\gamma}} = 0,$$

dans laquelle les variables sont séparées.

Cette équation fera connaître γ en fonction de θ; par conséquent, en éliminant γ entre cette équation et la deuxième des équations (8) du n° 101, on aura t en fonction de θ.

105. *Surfaces développables.* — Ces surfaces sont engendrées par une ligne qui se meut de manière à rester constamment tangente à une courbe donnée ds'. Elles sont donc un cas particulier des surfaces réglées quelconques, et l'on passe de celles-ci à celles-là, en supposant que la plus courte distance dp de deux génératrices infiniment voisines est nulle, γ est alors constant et égal à un angle droit, dq devient l'élément ds' de la courbe directrice, c'est-à-dire de l'arête de rebroussement de la surface développable; si l'on prend toujours pour lignes coordonnées les génératrices rectilignes et leurs orthogonales, l'on a

$$d\sigma = t\,d\varepsilon,\quad d\sigma_1 = d\rho_1 = ds' + dt;$$

$$\frac{d\sigma_1}{l} = 0,\quad \frac{d\sigma}{l} = 0,\quad \frac{d\sigma'}{r_1} = 0,\quad \frac{d\sigma}{r} = d\omega.$$

L'équation différentielle (2) devient

$$\frac{1}{\pi}\left[t^2 d\varepsilon^2 + (ds' + dt)^2\right] - t\,d\omega\,d\varepsilon = 0, \tag{4}$$

et conséquemment l'on a

$$\frac{dt^2}{d\varepsilon^2} + 2\left(\frac{ds'}{d\varepsilon}\right)\frac{dt}{d\varepsilon} + \left(\frac{ds'^2}{d\varepsilon} - \pi\frac{d\omega}{d\varepsilon}t + t^2\right) = 0, \tag{5}$$

équation différentielle entre deux variables t et ρ.

Surfaces coniques. — Ces surfaces sont un cas particulier des surfaces développables, puisqu'il suffit de supposer que dans celles-ci la courbe directrice est un point. On passera

donc des surfaces développables aux surfaces coniques, en posant ds' nul. L'équation précédente devient donc

$$\frac{dt^2}{d\varepsilon^2} - \pi \frac{d\omega}{d\varepsilon} t + t^2 = 0. \tag{6}$$

Problème IV. — *Déterminer sur une surface conique une courbe telle, que le rayon de courbure de la section normale suivant l'élément de cette courbé soit proportionnel à la longueur t de la génératrice rectiligne, comptée à partir du sommet.*

On a la condition, k étant une constante, $\pi = kt$; on peut plus généralement supposer k égale à une fonction de ρ seulement. Ce qui revient à dire que ce coefficient conserve la même valeur sur la même génératrice; on obtient alors l'équation différentielle

$$\frac{dt}{t} = d\varepsilon\left(1 + k\frac{d\omega}{d\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}},$$

la courbe cherchée a donc pour équation

$$t = \mu e^{\int d\varepsilon\left(1 + k\frac{d\omega}{d\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

dans laquelle μ est la constante introdnite par l'intégration.

106. *Surface de révolution.* — Dans ces surfaces, $\frac{1}{l}$ étant nul, l'équation différentielle de la courbe sera

$$\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{r}\right) d\sigma^2 + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{r_1}\right) d\sigma_1^2 = 0.$$

Si la courbure $\frac{1}{\pi}$ est une fonction de la variable t seulement, l'on obtient

$$d\theta = \frac{dt}{t}\left[\frac{\pi\psi'' - (1 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{t(1 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}} - \pi\psi'}\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui ne dépend que des quadratures.

Si la courbure $\frac{1}{\pi}$ est liée harmoniquement avec les courbures $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$ par la relation

$$\frac{k^2+t^2}{\pi}=\frac{t^2}{r}+\frac{k^2}{r_1},$$

k étant une constante, on aura l'équation différentielle

$$k\,d\theta = d\sigma_1,$$

dont l'intégrale est

$$k(\theta - \theta_0) = \sigma_1,$$

θ_0 étant la constante introduite par l'intégration.

§ III. — Des lignes de courbure.

107. Nous avons déjà défini ces lignes dans le Chapitre relatif à la courbure des surfaces (n° 70). L'équation que nous avons trouvée est

$$(1)\quad \left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r_1}\right)d\sigma_1^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_1\,d\sigma-\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r}\right)d\sigma^2=0.$$

Le premier avantage de cette forme est que le sens géométrique des différents coefficients s'y trouve déterminé, de sorte que, ces coefficients ne se rapportant pas plus à un système qu'à un autre, l'équation est, par cela même, écrite dans un système quelconque. Le second avantage est que ces coefficients se prêtent également à une traduction analytique qui facilite le passage de l'équation générale à celle qui se rapporte à un système particulier. Enfin le troisième avantage est que cette forme se prête naturellement à la recherche des lignes de courbure d'une surface quelconque.

Recherche des lignes de courbure. — Lorsqu'on écrit les équations d'une surface, on rapporte chaque point à un système de coordonnées; or le système que l'on choisit de préférence est celui qui résulte soit de la définition de la surface, soit d'un de ses modes de génération. L'équation des lignes de courbure que nous avons écrite nous apprend immédiatement si le système des coordonnées est celui des lignes de

courbure; car si le système est rectangulaire, il suffit que l'on ait $\frac{1}{l} = 0$, et s'il ne l'est pas, que le rapport de l'un des coefficients extrêmes au sinus soit nul [nº 59, form. (3)]. Il nous apprend aussi si l'une des lignes du système, $d\sigma$ par exemple, est une ligne de courbure, car dans ce cas cette équation se présente sous la forme d'un produit de deux facteurs, dont l'un des deux est l'arc $d\sigma$, et l'autre une expression différentielle du premier ordre et du premier degré. Si ni l'une ni l'autre des séries des lignes coordonnées ne se compose pas de lignes de courbure, on obtient une expression différentielle qui est du premier ordre et de second degré. Or cette équation est elle-même susceptible de se simplifier suivant la nature du système dont on a fait usage. Ces observations vont trouver leurs applications dans les problèmes suivants.

PREMIER CAS. — *Les deux lignes coordonnées sont les lignes de courbure.*

108. PROBLÈME V. — *Lignes de courbure des surfaces de révolution.*

D'après ce que nous avons établi au nº 89, le système des coordonnées lignes méridiennes et cercles parallèles est orthogonal. Or nous avons déjà reconnu que la courbure $\frac{1}{l}$ de ce système (nº 103) est nulle; de là on conclut que le système des coordonnées est celui des deux séries de lignes de courbure de la surface. C'est aussi ce que l'on aurait pu établir directement, en prouvant que sur ces deux séries de courbes deux normales infiniment voisines se rencontrent. On voit que ces deux séries de lignes de courbure sont l'une et l'autre composées de lignes planes.

PROBLÈME VI. — *Lignes de courbure de la surface engendrée par une courbe plane dont le plan s'enroule sur un cylindre (surfaces moulures).*

Dans cette surface le système de coordonnées qui s'est présenté naturellement (nº 96) est orthogonal. Or on reconnaît que la composante normale $\frac{1}{l}$ de la courbure inclinée de l'arc $d\sigma$ est nulle, puisque le plan de cette courbure n'est

autre que le plan tangent. Le système de coordonnées $v = \text{const.}$ et $\iota = \text{const.}$ est donc le système des lignes de courbure de la surface. Les deux séries de lignes de courbure sont encore des lignes planes. La série $v = \text{const.}$ donne la courbe génératrice dans une de ses positions; la série $\iota = \text{const.}$ donne une courbe parallèle à la directrice.

109. **Problème VII.** — *Lignes de courbure de la surface engendrée par une courbe plane dont le plan s'enroule sur une surface développable.*

Si dans cette surface on prend pour système de coordonnées celui qui se présente naturellement : 1° la courbe génératrice dans une de ses positions; 2° la courbe décrite par un point quelconque de cette génératrice, on reconnaît : 1° que le système est orthogonal, 2° que la composante normale $\frac{1}{l}$ de la courbure inclinée de l'arc de la seconde courbe est nulle, puisque le plan de cette courbure n'est autre chose que le plan tangent; le système des coordonnées est donc le système des lignes de courbure de la surface. On reconnaît aussi que les lignes de courbure de la première série sont des lignes planes, puisqu'elles ne sont autre chose que les diverses positions de la courbe génératrice. Quant aux lignes de la deuxième série, elles sont osculatrices de lignes sphériques.

Équations en termes finis des lignes de courbure. — Considérons une courbe directrice ds' et la surface enveloppe de son plan normal. Lorsque ce plan s'enroule sur la surface polaire de la courbe ds', le point o qui se trouve sur la directrice dans une des positions du plan s'y maintient, ce plan reste normal à la directrice, et la parallèle menée du point o à la génératrice rectiligne de contact tourne autour de ce point, à chaque position infinitésimale, d'un angle égal à la flexion $d\omega$ de la directrice ds', de sorte que si l'on rapporte cette parallèle à la droite fixe dans ce plan, qui a été menée du point o parallèlement à la génératrice initiale de contact, la somme des déplacements angulaires sera $\Omega = \int d\omega$. Soit la courbe génératrice rapportée à cette droite fixe on' et à sa perpendiculaire or', et

soit $n' = \psi(\iota')$ l'équation de cette droite. Si nous rapportons un point de cette courbe : 1° à la droite *on* qui, dans la position que l'on considère, est parallèle à la génératrice de contact; 2° à la perpendiculaire *or* située dans le plan, on aura, en se reportant au n° 96,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} n &= \psi(\iota')\cos\Omega + \iota'\sin\Omega, \\ \iota &= \iota'\cos\Omega - \psi(\iota')\sin\Omega. \end{aligned} \right.$$

Or, comme dans la position que l'on considère du plan mobile, l'équation (1) du n° 96 a lieu, on aura, en ayant égard aux équations (2),

$$(3) \qquad x = x' + \iota\cos(\iota, x) + n\cos(n, r) \quad \{3\},$$

dans lesquelles x', y', z' sont les coordonnées du point o, et les autres quantités ont la même signification que dans le numéro désigné. Telles sont les équations de la courbe génératrice dans une de ses positions, correspondantes à une valeur de $v =$ const., et les équations de l'autre ligne de courbure correspondantes à une valeur de $\iota' =$ const.

Différentielles des arcs coordonnés. — Nous avons calculé au n° 96 la valeur de ds^2, mais dans cette équation il faut remplacer ι et n ou son égal $f(\iota)$ par leurs valeurs tirées des équations (2) précédentes. Or, si l'on remarque que ces dernières équations donnent par la différentiation

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} f'(\iota)d\iota &= [\cos\Omega\,\psi'(\iota') + \sin\Omega]\,d\iota' + \iota\,d\omega, \\ d\iota &= [\cos\Omega - \sin\Omega\,\psi'(\iota')]\,d\iota' - f(\iota)\,d\omega, \end{aligned} \right.$$

on obtient, par la substitution de ces valeurs dans l'équation (2) du n° 96, l'expression

$$(5) \qquad ds^2 = \left(\frac{ds' + \iota\,d\varepsilon}{dv}\right)^2 dv^2 + \left\{1 + [\psi'(\iota')]^2\right\}^{\frac{1}{2}} d\iota'^2;$$

de là on conclut que, si l'on représente par $\mathfrak{R}'$ le rayon de courbure de la courbe ds', l'on a

$$(6) \qquad d\sigma = (\mathfrak{R}' + \iota)\,d\varepsilon, \qquad d\sigma_1 = \left\{1 + [\psi'(\iota')]^2\right\}^{\frac{1}{2}} d\iota';$$

le système est donc orthogonal comme nous l'avions reconnu.

Ces deux dernières équations sont évidentes, on aurait donc pu les obtenir directement.

Les équations (2) et (3) renferment les équations des lignes de courbure des surfaces suivantes, qui sont :

1° Les surfaces de révolution; la surface développable sur laquelle s'enveloppe le plan qui contient la génératrice, se réduit à une droite qui est l'axe de révolution.

2° Les surfaces moulures; la surface développable sur laquelle s'enroule le plan est un cylindre. Dans ces deux cas les lignes de courbure des deux séries sont planes.

3° Les surfaces engendrées par une courbe plane dont le plan s'enroule sur un cône; les lignes de courbure de la première série sont planes et celles de la seconde sont sphériques.

4° Les surfaces engendrées par une courbe plane dont le plan s'enroule sur une surface développable; les lignes de courbure de la première série sont planes et celles de la seconde osculatrices de lignes sphériques.

Pour obtenir les équations relatives au premier cas, il faudrait faire nuls l'angle Ω et les coordonnées x', y', z'; dans le second cas, l'angle Ω serait nul; dans le troisième, le point décrivant reste à une distance invariable du sommet du cône.

110. *Surfaces développables.* — Ces surfaces sont un cas particulier de celles obtenues dans le problème précédent. Il suffit, en effet, de supposer que la courbe génératrice est une droite. Soient les équations de cette droite qui rencontre la directrice

$$n' = u \sin\alpha, \quad \iota' = u \cos\alpha,$$

α étant une constante et u une longueur variable, on trouve alors

$$d\sigma = (\mathcal{R}' + \iota)\, d\varepsilon, \quad d\sigma' = du, \quad \iota = u\cos(\alpha + \Omega);$$

les lignes de courbure sont donc la génératrice u dans ses diverses positions et les trajectoires orthogonales de cette génératrice sur la surface développable engendrée par u. La droite u s'enveloppe sur la surface développable donnée et forme l'arête de rebroussement de la surface développable engendrée par u, et cette arête est une développée de la courbe directrice ds'.

Si la droite u, au lieu de passer par un point de la courbe directrice ds', a une position quelconque dans le plan, l'on aura, a étant une constante,

$$n' = \iota' \operatorname{tang}\alpha + a,$$

l'on aura donc les équations des lignes de courbure de la surface développable engendrée par la droite

$$n\cos\alpha = \iota' \sin(\alpha + \Omega) + a\cos\alpha\cos\Omega,$$
$$\iota\cos\alpha = \iota' \cos(\alpha + \Omega) - a\cos\alpha\sin\Omega.$$

Les équations (6) deviennent

$$d\sigma = (\mathfrak{R}' + \iota)\,d\varepsilon, \quad d\sigma_1 = (1 + \operatorname{tang}^2\alpha)^{\frac{1}{2}}\,d\iota'.$$

On a donc une surface développable dont l'arête de rebroussement est située sur la surface développable proposée et forme une développée d'une courbe parallèle à la directrice ds'. Ainsi les développées de toutes les courbes parallèles à une courbe donnée sont situées sur une même surface développable.

Surfaces coniques. — Lorsque la surface développable sur laquelle s'enroule le plan qui contient la droite est un cône et que cette droite passe par le sommet du cône, elle engendre un autre cône. Les lignes de courbure du cône sont donc les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales; or chaque trajectoire orthogonale est toujours à la même distance du sommet, puisqu'elle est engendrée par un point de la droite qui passe par ce sommet. Donc le second système de lignes de courbure se compose de lignes sphériques, le centre de la sphère étant au sommet du cône.

Généralement, quelle que soit la position du point dans le plan mobile, il reste à une distance invariable du sommet; donc il engendre une ligne sphérique, et toutes les développées de cette ligne se trouvent sur la surface du cône. On conclut que si une ligne est sphérique, toutes ses développées ainsi que les développées des lignes parallèles de la proposée sont situées sur la surface d'un cône. Ce qui est un théorème connu.

111. PROBLÈME VIII. — *Lignes de courbure de la surface engendrée par une courbe plane qui se déforme d'après une loi donnée, pendant que le plan s'enveloppe sur une surface développable.*

Le problème ne diffère du précédent (n° 109) qu'en ce que, à la place des équations (2) du numéro cité, l'on a

$$(2)\qquad \begin{cases} n = n'\cos\Omega + \iota'\sin\Omega, \\ \iota = \iota'\cos\Omega - n'\sin\Omega, \end{cases}$$

dans lesquelles n' et ι' sont des fonctions arbitraires de deux variables, l'une v et l'autre u; on obtient par la différentiation, dn', $d\iota'$ étant les différentielles complètes par rapport aux deux variables v et u,

$$dn = \cos\Omega\, dn' + \sin\Omega\, d\iota' + \iota\, d\omega,$$
$$d\iota = \cos\Omega\, d\iota' - \sin\Omega\, dn' - n\, d\omega.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'expression de ds^2 (n° 96), mise sous la forme

$$ds^2 = (ds' + \iota\, d\varepsilon)^2 + (\iota\, d\omega - dn)^2 + (n\, d\omega + d\iota)^2,$$

on obtient

$$ds^2 = (ds' + \iota\, d\varepsilon)^2 + dn'^2 + d\iota'^2,$$

conséquemment

$$(3)\qquad \begin{cases} d\sigma^2 = \left[(\mathfrak{R}' + \iota)\dfrac{d\varepsilon^2}{dv^2} + \left(\dfrac{dn'^2}{dv^2} + \dfrac{d\iota'^2}{dv^2}\right)\right] dv^2, \\ d\sigma_1^2 = \left(\dfrac{dn'^2}{du^2} + \dfrac{d\iota'^2}{du^2}\right) du^2, \end{cases}$$

$$d\sigma\, d\sigma_1 \cos\varphi = \left(\frac{dn'}{du}\frac{dn'}{dv} + \frac{d\iota'}{du}\frac{d\iota'}{dv}\right) du\, dv.$$

Surface engendrée par un cercle dont le rayon est variable, pendant que son plan s'enveloppe sur une surface développable. — Il faut, dans le calcul precédent, poser, en représentant par $f(v)$ le rayon variable,

$$n' = f(v)\sin u, \quad \iota' = f(v)\cos u,$$

ce qui donne, par suite des formules (2) et (3),

$$n = f(v)\sin(u+\Omega), \quad \iota = f(v)\cos(u+\Omega),$$

$$d\sigma = \left\{ (\mathfrak{R}' + \iota)^2 \frac{d\varepsilon^2}{dv^2} + [f'(v)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dv, \quad d\sigma_1 = f(v)\,du;$$

$$\cos\varphi = 0.$$

Le système est donc orthogonal; de plus, la composante normale $\frac{1}{l}$ de la courbure inclinée de l'arc $d\sigma$ est nulle, puisque le plan de cette courbure est le plan tangent à la surface. Le système des coordonnées $v =$ const., $u =$ const. est donc le système des lignes de courbure; la première série $v =$ const. est composée de cercles. Il est facile de reconnaître que cette dernière surface est l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt la courbe directrice ds', et dont le rayon varie d'après une loi donnée $f(v)$.

On a supposé dans le calcul précédent que le centre du cercle générateur se trouvait sur la courbe directrice ds'; mais on aura les mêmes résultats si l'on suppose que le centre se trouve en un point déterminé du plan qui s'enroule sur la surface développable, cela revient à dire que ce centre parcourt une courbe parallèle à la courbe directrice ds', et que son rayon varie d'après une loi donnée.

Surfaces canaux. — Lorsque le rayon du cercle générateur est constant, la surface engendrée est une *surface canal.* Il n'y a qu'à supposer dans le calcul précédent le rayon du cercle $f(v)$ constant, dans les formules précédentes (2).

Les lignes de courbure d'une série sont donc des cercles égaux entre eux, et les lignes de courbure de l'autre série sont des courbes parallèles à la directrice ds'.

DEUXIÈME CAS. — *L'une des lignes coordonnées est une ligne de courbure.*

112. Si l'une des lignes coordonnées est une ligne de courbure, et l'autre est quelconque, l'équation différentielle passe au premier degré.

En effet, si $d\sigma$ est une ligne de courbure, l'on a la condition $\frac{1}{\varphi} = 0$, laquelle entraîne l'équation

$$\frac{1}{l} - \frac{\cos\varphi}{r} = 0.$$

Or, si l'on élimine $\frac{1}{l}$ entre cette équation et l'équation (1) du n° 107, on trouve

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)(d\sigma_1 \cos\varphi + d\sigma)\, d\sigma_1 = 0;$$

le facteur $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$ ne peut pas être généralement nul ; il faut donc égaler à zéro l'un des deux autres facteurs. Si l'on pose $d\sigma_1$ nul, on trouve $\rho_1 =$ const. : c'est la ligne de courbure dont $d\sigma$ est l'arc élémentaire, c'est-à-dire l'une des deux lignes coordonnées. Si l'on pose

$$d\sigma_1 \cos\varphi + d\sigma = 0,$$

on a l'équation de l'autre ligne de courbure, et l'on reconnaît que c'est la trajectoire orthogonale des lignes coordonnées de la série ρ_1.

113. Problème IX. — *Lignes de courbure de la surface héliçoïdale dont la courbe génératrice ψ est donnée par l'équation différentielle*

$$t\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\mu^2 - t^2},$$

μ étant une constante.

On trouve les relations suivantes :

$$d\sigma_1^2 = \frac{\mu^2}{t^2}\, dt^2, \quad d\sigma^2 = (a^2 + t^2)\, d\theta^2,$$

$$\cos\varphi\, d\sigma\, d\sigma_1 = \frac{a\sqrt{\mu^2 - t^2}}{t}\, d\theta\, dt.$$

Or, si l'on calcule la deuxième courbure géodésique $\frac{1}{\varphi_1}$ de

la courbe $d\sigma_1$, d'après les formules du n° 58, on trouve que cette courbure est nulle. C'est d'ailleurs ce que l'on verra au numéro suivant; de là résulte que la ligne coordonnée $d\sigma_1$ est une ligne de courbure. Donc les lignes de courbure de l'autre série seront les trajectoires orthogonales de la courbe $d\sigma_1$; d'après cela, on aura

$$a\,d\theta = \frac{\mu^2\,dt}{t\sqrt{\mu^2 - t^2}} = \frac{-\mu\,d\left(\frac{\mu}{t}\right)}{\sqrt{\frac{\mu^2}{t^2} - 1}}.$$

L'intégrale de cette équation, θ_0 étant une constante arbitraire, s'obtient directement

$$a(\theta + \theta_0) = \mu \log\left(\frac{\mu - \sqrt{\mu - t^2}}{t}\right);$$

on en déduit

$$t = \frac{2\mu}{e^{-\frac{a}{\mu}(\theta+\theta_0)} + e^{\frac{a}{\mu}(\theta+\theta_0)}},$$

qui est l'équation en termes finis de l'autre série de lignes de courbure.

TROISIÈME CAS. — *Les deux lignes coordonnées sont quelconques.*

114. PROBLÈME X. — *Lignes de courbure de la surface hélicoïdale quelconque.*

Si nous nous reportons aux équations du n° 85, nous avons

$$\frac{dx}{d\sigma_1} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\psi'^2}}, \quad \frac{dy}{d\sigma_1} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\psi'^2}}, \quad \frac{dz}{d\sigma_1} = \frac{\psi'}{\sqrt{1+\psi'^2}};$$

$$\frac{dx}{d\sigma} = -\frac{t\sin\theta}{\sqrt{a^2+t^2}}, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \frac{t\cos\theta}{\sqrt{a^2+t^2}}, \quad \frac{dz}{d\sigma} = \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}};$$

$$\cos\varphi\, d\sigma\, d\sigma_1 = a\psi'\, d\theta\, dt;$$

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\right) = \frac{\psi'\psi''\cos\theta}{(1+\psi'^2)^2}, \quad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) = -\frac{t\cos\theta}{a^2+t^2};$$

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{dy}{d\sigma_1}\right) = \frac{\psi'\psi''\sin\theta}{(1+\psi'^2)^2}, \quad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dy}{d\sigma}\right) = -\frac{t\sin\theta}{a^2+t^2};$$

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{dz}{d\sigma_1}\right) = \frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^2}, \quad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dz}{d\sigma}\right) = 0;$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\right)=\frac{-\sin\theta}{\sqrt{1+\psi'^2}\sqrt{a^2+t^2}},$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dy}{d\sigma_1}\right)=\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\psi'^2}\sqrt{a^2+t^2}},$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dz}{d\sigma_1}\right)=0.$$

Soient X_2, Y_2, Z_2 les cosinus des angles de la normale à la surface, avec trois axes, et posons, pour abréger,

$$\mathfrak{D}=\sqrt{a^2+t^2+t^2\psi'^2},$$

l'on a

$$X_2=-\frac{(t\psi'\cos\theta-a\sin\theta)}{\mathfrak{D}},\quad Y_2=-\frac{(t\psi'\sin\theta+a\cos\theta)}{\mathfrak{D}},\quad Z_2=\frac{t}{\mathfrak{D}}.$$

D'après ces formules, on trouve

$$\frac{\cos(n,\mathfrak{R}_1)}{\mathfrak{R}_1}=\frac{t\psi''}{1+\psi'^2},\qquad \frac{\cos(n,\mathfrak{R})}{\mathfrak{R}}=\frac{t^2\psi'}{a^2+t^2},$$

$$\frac{\cos(n,\mathfrak{L})}{\mathfrak{L}}=\frac{-a}{\sqrt{1+\psi'^2}\sqrt{a^2+t^2}};$$

en portant ces valeurs dans l'équation générale des lignes de courbure, on trouve

$$a\left(\frac{1}{t}+\frac{\psi'\psi''}{1+\psi'^2}\right)dt^2-\left[\frac{\psi''}{1+\psi'^2}(a^2+t^2)-t\psi'\right]dt\,d\theta$$
$$-a\left[\frac{a^2}{(1+\psi'^2)t}+t\right]d\theta^2=0,$$

dans laquelle les variables sont séparées, et qui par conséquent ne dépend que des quadratures.

Cas particuliers. 1° *Héliçoïde à plan directeur.* — Il faut poser $\psi=$ const., on obtient

$$d\theta=\frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}},$$

que nous avons déjà trouvée n° 85, et dont l'intégration est, μ étant la constante d'intégration,

$$t=\frac{1}{2}\left[e^{\theta-\mu}-a^2e^{-(\theta-\mu)}\right].$$

2° Si l'équation différentielle de la courbe génératrice ψ est

$$\frac{d\psi'}{\psi'(1+\psi'^2)} = \frac{t\,dt}{a^2 - t^2},$$

l'intégrale première de cette courbe est, c étant la constante de l'intégration,

$$d\psi = \frac{c\,dt\sqrt{a^2+t^2}}{\sqrt{1 - c^2(a^2+t^2)}};$$

et l'équation différentielle des lignes de courbure devient

$$d\theta = \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}\sqrt{(1-c^2a^2) - c^2t^2}}.$$

3° Si l'équation différentielle de la courbe génératrice est

$$\frac{\psi'\,d\psi'}{1+\psi'^2} + \frac{dt}{t} = 0,$$

une première intégration donne, μ étant la constante de l'intégration,

$$d\psi = \frac{dt}{t}\sqrt{\mu^2 - t^2}.$$

Or, si l'on remarque que l'on a

$$d\psi = \frac{-\mu\,d\frac{\mu}{t}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{t^2} - 1}} - \frac{t\,dt}{\sqrt{\mu^2 - t^2}},$$

on trouve, c étant la constante introduite par l'intégration,

$$z + c = \sqrt{\mu^2 - t^2} + \mu \log \frac{t}{\mu + \sqrt{\mu^2 - t^2}},$$

qui est l'équation de la génératrice.

On trouve pour équation différentielle des lignes de courbure

$$a\,d\theta = \frac{\mu^2\,dt}{t\sqrt{\mu^2 - t^2}} = \frac{-\mu\,d\left(\frac{\mu}{t}\right)}{\sqrt{\frac{\mu^2}{t^2} - 1}},$$

dont l'intégrale est

$$a(\theta + \theta_0) = \mu \log \frac{t}{\mu + \sqrt{\mu^2 - t^2}},$$

d'où on déduit

$$t = \frac{2\mu}{e^{-\frac{a}{\mu}(\theta+\theta_0)} + e^{\frac{a}{\mu}(\theta+\theta_0)}},$$

qui est l'équation en termes finis de la projection des lignes de courbure sur le plan des x, y.

115. *Équation des lignes de courbure dans le système cartésien.* — Cette équation se déduit en quelque sorte intuitivement de l'équation générale; il n'y a qu'à apprécier les arcs des lignes coordonnées déterminées sur la surface par les deux plans $x=\rho$, $y=\rho_1$, et les courbures normales propres ou inclinées de ces arcs : on obtient immédiatement, en appelant p, q, r, s, t les coefficients différentiels du premier et du second ordre de z,

$$d\sigma^2=(1+p^2)d\rho^2,\quad d\rho_1^2=(1+q^2)d\rho_1^2,\quad d\sigma d\sigma_1\cos\varphi=pqd\rho d\rho_1,$$

$$\frac{d\sigma^2}{d\rho^2}\frac{1}{r}=\text{r}\cos(n,z),\quad \frac{d\sigma_1^2}{d\rho_1^2}\frac{1}{r_1}=t\cos(n,z),$$

$$\frac{d\sigma}{d\rho}\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{1}{l}=s\cos(n,z);$$

et en les substituant dans l'équation (1) du n° 107, on trouve

$$dy^2[pqt-s(1+q^2)] + dydx[(1+p^2)t-(1+q^2)\text{r}] + dx^2[(1+p^2)s-pq\text{r}]=0,$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante, le signe d indiquant une différentielle complète,

$$(dx+pdz)dq-(dy+qdz)dp=0.$$

On l'obtient directement en exprimant que deux normales aux points infiniment voisins

$$(x,y,z),\quad (x+dx,y+dy,z+dz)$$

se rencontrent.

116. *Surfaces coniques.* $z=px+qy$. — On tire de cette équation $dp=-\frac{y}{x}dq$; en substituant dans l'équation pré-

cédente, l'on a

$$dq[x(p\,dz + dx) + y(q\,dz + dy)] = 0.$$

Le premier facteur donne

$$d\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

dont l'intégrale est $z = \mu y$, μ étant la constante d'intégration; le second facteur donne

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

dont l'intégrale est, μ_1 étant une seconde constante,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mu_1^2.$$

Ainsi une série de lignes de courbure se compose des intersections du cône et des sphères concentriques au cône, et l'autre des intersections du cône avec des plans passant par l'axe. C'est ce que nous avions déjà trouvé.

117. *Surfaces de révolution.* — L'équation des surfaces de révolution est (n° 89)

$$z = \psi(t), \quad t = \sqrt{x^2 + y^2};$$

on déduit

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{\psi'(t)}{t},$$

qui est l'équation aux différences partielles; on déduit de même

$$p = q\frac{x}{y}, \quad dp = q\,d\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}dq.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation, on obtient

$$-q^2\,dz\,d\left(\frac{x}{y}\right) + y\,dq\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) - q\,dy\,d\left(\frac{x}{y}\right) = 0,$$

qui s'écrit sous la forme

$$d\left(\frac{x}{y}\right)[q^2\,dz - (y\,dq - q\,dy)] = 0.$$

Le premier facteur égalé à zéro donne

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{y} = a,$$

a étant une constante.

Le second facteur égalé à zéro donne

$$dz - d\left(\frac{q}{y}\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad z - b = \frac{q}{y} = \frac{\psi'(t)}{t},$$

b étant une nouvelle constante.

Donc $(z - b)$ est une fonction t, ce qui donne une surface de révolution autour de l'axe des z, laquelle ne peut rencontrer la surface de révolution proposée que suivant un parallèle.

Ainsi les lignes de courbure sont les courbes méridiennes et les cercles parallèles.

118. Dans le cas qui nous occupe, c'est-à-dire lorsque les lignes coordonnées ne sont ni l'une ni l'autre lignes de courbure, la recherche de ces lignes se trouve simplifiée par l'introduction de certaines autres lignes coordonnées :

1° Lorsque les lignes coordonnées sont deux séries de lignes asymptotiques; alors les courbures $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$ étant nulles, l'équation des lignes de courbure se réduit à la forme binôme

$$d\sigma_1 = \pm d\sigma.$$

Dans ce cas les lignes de courbure sont les deux bissectrices du système. C'est ainsi que les lignes bissectrices des angles des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe, que nous avons étudiées au n° 83, sont les lignes de courbure de cette surface. Il en est de même des bissectrices des angles des deux séries de lignes asymptotiques de l'héliçoïde gauche à plan directeur, ces deux séries étant les génératrices rectilignes de la surface et leurs trajectoires orthogonales. On obtient donc les équations des lignes de courbure en faisant m égal à 1 dans les équations du n° 85. Appliquons encore ces considérations à la solution de la question suivante.

PROBLÈME XI. — *Lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique.*

Soit le paraboloïde donné par l'équation

$$z = mxy.$$

Si nous prenons pour lignes coordonnées les deux systèmes de génératrices rectilignes dont les équations sont $x = \rho$, $y = \rho_1$, on trouve

$$d\sigma = d\rho\sqrt{1 + m^2\rho_1^2}, \quad d\sigma_1 = d\rho\sqrt{1 + m^2\rho^2};$$

de là résulte que l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$\frac{d\rho}{\sqrt{1 + m^2\rho^2}} = \pm \frac{d\rho_1}{\sqrt{1 + m^2\rho_1^2}}.$$

Elle a pour intégrale, μ étant la constante de l'intégration,

$$m\rho + \sqrt{1 + m^2\rho^2} = \mu\left(m\rho_1 \pm \sqrt{1 + m^2\rho_1^2}\right).$$

Si l'on remplace ρ et ρ_1 par leurs valeurs, et qu'on chasse les radicaux, on obtient les deux séries de coniques

$$x^2 + y^2 \pm \frac{\mu^2 + 1}{\mu}xy - \frac{\mu^2 - 1}{4\mu^2 m^2} = 0,$$

dans lesquelles le signe supérieur se rapporte à une série de lignes de courbure, et le signe inférieur à l'autre série. Ces coniques satisfont à cette condition qu'elles sont concentriques et que les diagonales des rectangles construits sur les axes ont la même longueur pour toutes les coniques des deux systèmes.

119. 2° Il n'est pas nécessaire que les deux lignes coordonnées soient asymptotiques pour que les deux lignes de courbure soient les deux bissectrices du système; il suffit que les courbures normales des lignes coordonnées soient égales; alors on tombe encore sur l'équation des bissectrices.

Problème XII. — *Lignes de courbure de la surface.*

$$-az = \log\cos[a(x+\alpha)]\cos[a(y+\beta)],$$

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tang}[a(x+\alpha)]\cos[a(y+\beta)],$$

$$\frac{dz}{dy} = \operatorname{tang}[a(y+\beta)]\cos[a(x+\alpha)],$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{a\cos[a(y+\beta)]}{\cos^2[a(x+\alpha)]}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{a\cos[a(x+\alpha)]}{\cos^2[a(y+\beta)]},$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = -\operatorname{tang}[a(x+\alpha)]\operatorname{tang}[a(y+\beta)].$$

D'après ces valeurs, on reconnaît que les valeurs $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$, en appliquant les formules (17) du n° 52, sont égales.

De là résulte que les équations des lignes de courbure de la surface sont

$$\frac{dy}{\cos[a(y+\beta)]} = \pm\frac{dx}{\cos[a(x+\alpha)]},$$

dont les intégrales sont, μ étant la constante d'intégration, les équations suivantes :

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - a(y+\beta)\right] = \mu\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - a(x+\alpha)\right],$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - a(y+\beta)\right]\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - a(x+\alpha)\right] = \frac{1}{\mu}.$$

120. 3° Si l'une des deux lignes coordonnées est seule asymptotique, l'équation des lignes de courbure prend la forme

$$(1) \qquad d\sigma_1^2 + \frac{l}{r}\,d\sigma\,d\sigma_1 - d\sigma^2 = 0,$$

Conoïde droit. — Soit l'équation du conoïde

$$z = \psi(\operatorname{tang}\theta), \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x}, \quad \tau = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Prenons les coordonnées $\theta = \rho$, $\tau = \rho_1$; on trouve alors, en opé-

rant soit géométriquement, soit analytiquement,

$$2\frac{d\tau^2}{d\theta^2} - \left(\frac{\psi''}{\cos^2\theta.\psi} + 2\operatorname{tang}\theta\right)\tau\frac{d\tau}{d\theta} - \left(\tau^2 + \frac{\psi'^2}{\cos^2\theta}\right) = 0,$$

et l'on retombe, dans le cas de l'héliçoïde gauche à plan directeur, sur l'équation connue.

Surfaces réglées quelconques. — En ayant égard aux relations établies au n° **101**, l'équation (1) du présent numéro devient

$$(dt + dq)(d\gamma - d\omega) + d\varepsilon\, dp = 0;$$

or, si, au moyen des relations (11) du n° **101**, on élimine γ de cette équation, elle ne renfermera plus que les variables ρ et t, et l'on aura

$$\zeta\frac{dt^2}{d\rho^2} + \left[\left(\zeta\frac{dq}{d\rho} - \frac{d\omega}{d\rho}\right) + t\frac{d\zeta}{d\rho} - t^2\zeta^2\frac{d\omega}{d\rho}\right]\frac{dt}{d\rho}$$
$$- \left[t\frac{dq}{d\rho}\frac{d\zeta}{d\rho} + \left(\frac{d\varepsilon}{d\rho}\frac{dp}{d\rho} - \frac{dq}{d\rho}\frac{d\omega}{d\rho}\right)(1 + \zeta^2 t^2)\right] = 0;$$

si l'on divise par ζ, l'on voit que les coefficients des deux derniers termes sont des trinômes du second degré en t, dont les coefficients sont des fonctions de ρ. Cette équation, dans le cas général, n'est pas intégrable.

Dans le cas des conoïdes, il faut poser $d\omega$ et dq nuls, et alors l'équation devient

$$\zeta\frac{dt^2}{d\rho^2} + t\frac{d\zeta}{d\rho}\frac{dt}{d\rho} + \frac{d\varepsilon}{d\rho}\frac{dp}{d\rho}(1 + \zeta^2 t^2) = 0,$$

qui concorde parfaitement avec celle que nous venons de trouver directement.

§ IV. — Des lignes dont la deuxième courbure géodésique est donnée.

121. *Équation différentielle.* — Si dans l'équation (2'') du n° 38 on suppose que $\frac{1}{V}$ représente une fonction quelconque

donnée, on aura l'équation différentielle des courbes tracées sur la surface telles, que la deuxième courbure géodésique sera égale à cette fonction. Cette équation différentielle du premier ordre et du second degré est

$$d\sigma_1^2\left(\frac{\sin\varphi}{V}+\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r_1}\right)+d\sigma_1 d\sigma\left(\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{V}+\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)$$
$$+d\sigma^2\left(\frac{\sin\varphi}{V}-\frac{1}{l}+\frac{\cos\varphi}{r}\right)=0.$$

Si le système des coordonnées est rectangulaire, cette équation devient

$$d\sigma_1^2\left(\frac{1}{V}+\frac{1}{l}\right)+d\sigma_1 d\sigma\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)+d\sigma^2\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{l}\right)=0;$$

si les lignes coordonnées sont les lignes de courbure de la surface, cette équation se réduit à

$$d\sigma_1^2+d\sigma\, d\sigma_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)V+d\sigma^2=0.$$

PROBLÈME XIII. — *Trouver les lignes tracées sur une surface de révolution telles, que leur deuxième courbure géodésique égale une fonction donnée de t, n° 89.*

Si l'on pose, pour abréger,

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)V=2F(t),$$

l'on aura, d'après le n° 103,

$$F(t)=\frac{V}{(1+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\psi'}{t}-\frac{\psi''}{1+\psi'^2}\right),$$

et l'équation différentielle de la courbe sera

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_1}=F\pm\sqrt{F^2-1},$$

dans laquelle les variables sont séparées.

Cas particuliers. — Supposons que la surface de révolution est un tore dont l'équation est

$$z^2 + (t - \alpha)^2 = a^2,$$

dans laquelle α et a sont des constantes; F devient égal à $\frac{V\alpha}{at}$, de sorte que l'équation différentielle de la courbe sera

$$d\theta = \frac{V\alpha\, dt}{t^2\sqrt{a^2 - (t-\alpha)^2}}.$$

1° Si la deuxième courbure géodésique $\frac{1}{V}$ est proportionnelle à la tangente de l'angle que le rayon mené de l'origine au point de la courbe fait avec l'axe de révolution, on a la condition $V = \frac{kz}{t}$, k étant une constante; l'intégrale de l'équation précédente, θ_0 étant la constante de l'intégration, sera

$$t^2 = \frac{2}{k\alpha}(\theta_0 - \theta);$$

ainsi la projection de la courbe sur le plan des xy est une spirale parabolique.

2° Si V est proportionnel à la distance t d'un point de la courbe à l'axe de révolution, on trouve la trajectoire des lignes méridiennes sous angle constant.

3° Si V est proportionnel au carré de t, on trouve la spirale sinusoïde pour projection de la courbe. Cette spirale a pour équation

$$t - \alpha = a \sin\left(\frac{\theta - \theta_0}{k a \alpha}\right).$$

4° Enfin si V est proportionnel au rectangle tz, on trouve la spirale logarithmique.

§ V. — DES LIGNES CONJUGUÉES.

122. Lorsqu'une ligne est donnée sur une surface, l'équation différentielle des lignes conjuguées est du premier ordre, et dépend généralement des composantes normales des

courbures propres ou inclinées des lignes coordonnées. Nous avons déjà donné cette équation différentielle au n° 72. Nous allons l'appliquer à quelques exemples, se rapportant aux courbes ellipsoïdales. Mais avant, il nous faut connaître les expressions du rayon de courbure des lignes coordonnées elliptiques.

Diamètres. — Normales. — Rayons de courbure de l'ellipsoïde en coordonnées elliptiques. — Pour abréger, nous représentons par h^3 le volume du parallélipipède construit sur les trois demi-axes de l'ellipsoïde; par D, D_1 les demi-diamètres parallèles aux directions de deux lignes de courbure en un point; par M la distance du centre au plan tangent: or, si on exprime cette distance en coordonnées elliptiques, n° 92, on trouve

$$M = \frac{h^3}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}}.$$

Le volume du parallélipipède construit sur les trois demi-diamètres conjugués étant constant et égal au produit des trois demi-axes, il résulte que le dénominateur de M représente l'aire du rectangle construit sur les demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan tangent; or la première des équations (2) du n° 92 peut s'écrire

$$\lambda^2 + (\lambda^2 - b^2) + (\lambda^2 - c^2) = x^2 + y^2 + z^2 + (\lambda^2 - \mu^2) + (\lambda^2 - \nu^2).$$

Le premier membre est la somme des carrés des trois demi-axes de l'ellipsoïde, laquelle égale la somme des carrés des demi-diamètres conjugués d'un système quelconque; donc, si l'on retranche du second membre le carré du demi-diamètre conjugué du plan tangent, lequel est $x^2 + y^2 + z^2$, la partie restante du second membre exprimera la somme des carrés des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan tangent: on a donc les deux équations

$$D^2 D_1^2 = (\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2), \quad D^2 + D_1^2 = (\lambda^2 - \mu^2) + (\lambda^2 - \nu^2),$$

desquelles on déduit

$$D^2 = \lambda^2 - \nu^2, \quad D_1^2 = \lambda^2 - \mu^2.$$

Calculons maintenant le rayon de courbure d'une ligne quel-

conque ellipsoïdale; soient λ, λ_1, λ_2 les trois demi-axes de l'ellipsoïde, son équation en coordonnées rectangles est

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda_1^2}+\frac{z^2}{\lambda_2^2}-1=0.$$

Si l'on différentie deux fois de suite cette équation par rapport à un déplacement ds effectué sur la courbe, on a l'équation

$$\frac{x}{\lambda^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{y}{\lambda_1^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{z}{\lambda_2^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right)$$
$$+\frac{dx^2}{\lambda^2 ds^2}+\frac{dy^2}{\lambda_1^2 ds^2}+\frac{dz^2}{\lambda_2^2 ds^2}=0.$$

Or la somme des trois premiers termes est la composante normale de la courbure, divisée par la distance du centre au plan tangent, et la somme des trois derniers est l'inverse du carré du demi-diamètre $\mathfrak{D}$ parallèle à l'élément de la courbe; on a donc, en appelant $\frac{1}{p}$ cette courbure normale,

$$p=\frac{\mathfrak{D}^2}{M}.$$

Si maintenant on suppose que l'élément ds coïncide successivement avec $d\sigma$ et $d\sigma_1$, et que ϖ_0, ϖ_1 représentent les rayons de courbure des sections normales suivant $d\sigma$ et $d\sigma_1$, on a

$$\varpi_0^2=\frac{(\lambda^2-\nu^2)^3(\lambda^2-\mu^2)}{k^6},\quad \varpi_1^2=\frac{(\lambda^2-\mu^2)^3(\lambda^2-\nu^2)}{h^6}.$$

Enfin, appelons N_x, N_y, N_z les segments de la normale à l'ellipsoïde, terminés aux plans coordonnés du système cartésien, perpendiculaires aux axes des x, y, z, on trouvera directement

$$\frac{\lambda^2}{N_x}=\frac{\lambda^2-b^2}{N_y}=\frac{\lambda^2-c^2}{N_z}=M,$$

lesquelles donnent l'expression de ces normales en coordonnées elliptiques.

Des lignes conjuguées ellipsoïdales. — Nous prenons pour lignes coordonnées de l'ellipsoïde le système des deux séries

de lignes de courbure; or, dans le cas d'un système de lignes de courbure, l'équation différentielle des lignes conjuguées d'une courbe donnée est l'équation (2) du n° 72

$$\frac{\varpi_1}{\varpi_0} + \left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma_0}\right)_0 \left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma_0}\right)_1 = 0,$$

le rapport $\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma_0}\right)_0$ étant tiré de l'équation de la courbe donnée; de là résulte que si l'équation de cette courbe est (n° 91)

$$\frac{dF}{d\mu}d\mu + \frac{dF}{d\nu}d\nu = 0,$$

l'équation différentielle de la courbe conjuguée sera

$$\frac{\mu^2-\lambda^2}{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}\,\frac{d\mu}{\frac{dF}{d\mu}(\lambda^2-\mu^2)} - \frac{\nu^2-\lambda^2}{(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}\,\frac{d\nu}{\frac{dF}{d\nu}(\lambda^2-\nu^2)} = 0.$$

Si l'on compare cette équation à l'équation différentielle (5) de la trajectoire orthogonale de la même courbe, qui a été donnée au n° 92, on conclut que l'on passe de la seconde à la première, en divisant le premier terme de la seconde par $(\lambda^2-\mu^2)$, et le second terme par $(\lambda^2-\nu^2)$.

123. Applications : 1° *Courbes conjuguées des lignes cylindro-elliptiques.* — En se reportant au n° 93, et en usant de la remarque que nous venons de faire, on trouve pour l'équation différentielle des courbes conjuguées des lignes cylindro-elliptiques

$$\frac{(\mu^2+l^2)\,d\mu}{\mu(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)} + \frac{(\nu^2+l^2)\,d\nu}{\nu(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)} = 0.$$

Cette équation différentielle ne diffère pas de l'équation différentielle de la trajectoire orthogonale des sphéro-coniques, pourvu que, dans celle-ci, l'on change (n° 94) λ^2 en $-l^2$. Donc l'équation des courbes conjuguées des lignes cylindro-elliptiques sera (numéro cité)

$$x^{l^2(b^2-c^2)}\,y^{(l^2+b^2)c^2}\,z^{(l^2+c^2)b^2} = \text{const.}$$

2° *Courbes conjuguées des sphéro-coniques.* — En se repor-

tant au n° 94, on trouve que l'équation différentielle de ces lignes est

$$\frac{d\mu}{\mu(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} + \frac{d\nu}{\nu(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)} = 0,$$

dont l'intégrale est, en passant aux coordonnées rectilignes,

$$x^{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} y^{\lambda^2 - \lambda_2^2} z^{\lambda_1^2 - \lambda^2} = \text{const.}$$

Les exposants ne dépendent que des distances focales. Cette surface sera la même lorsque les sphéro-coniques seront tracées sur des surfaces homofocales de l'ellipsoïde proposé. Donc les intersections de la série des surfaces que nous venons de trouver avec une série de surfaces du second degré homofocales à l'ellipsoïde, sont, sur chacune de ces surfaces, les conjuguées des sphéro-coniques. On déduit de là la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Une série de surfaces données par l'équation précédente et une série de sphères concentriques tracent sur chacune des surfaces du second degré homofocales de l'ellipsoïde un réseau de courbes conjuguées entre elles.*

3° Il sera également facile de déduire de ce qui précède les courbes conjuguées des intersections faites par des plans parallèles à l'un des trois plans principaux de l'ellipsoïde, car, en se reportant au n° 93, on voit qu'il suffit de changer dans l'équation traitée au commencement du présent numéro, successivement l^2 en $-c^2$, $-b^2$, et 0, pour obtenir les lignes conjuguées des intersections faites par des plans perpendiculaires à l'axe minimum, à l'axe moyen, à l'axe maximum de l'ellipsoïde; on trouve ainsi les trois équations

$$\frac{y}{x} = \text{const.}, \quad \frac{x}{z} = \text{const.}, \quad \frac{z}{y} = \text{const.}$$

On déduit de là que les intersections faites par une série de plans perpendiculaires à l'un des trois axes de l'ellipsoïde ont pour lignes conjuguées les intersections faites par une autre série de plans qui passent par cet axe.

124. PROBLÈME XIV (question inverse). — *Trouver les lignes*

conjuguées des intersections de l'ellipsoïde avec la série des surfaces contenues dans l'équation suivante, dans laquelle α, β, γ *sont des constantes :*

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \text{const.}$$

Si l'on passe aux coordonnées elliptiques, et qu'on prenne la différentielle, on obtient

$$\left(\frac{\alpha}{\mu^2} + \frac{\beta}{\mu^2 - b^2} + \frac{\gamma}{\mu^2 - c^2}\right)\mu\,d\mu$$
$$+ \left(\frac{\alpha}{\nu^2} + \frac{\beta}{\nu^2 - b^2} + \frac{\gamma}{\nu^2 - c^2}\right)\nu\,d\nu = 0;$$

or si, pour abréger, on pose les relations

$$\alpha + \beta + \gamma = f, \quad b^2(\alpha + \gamma) + c^2(\alpha + \beta) = g, \quad \alpha b^2 c^2 = h,$$

l'équation différentielle des courbes conjuguées sera

$$\frac{\mu\,d\mu}{f\mu^4 + g\mu^2 + h} + \frac{\nu\,d\nu}{f\nu^4 + g\nu^4 + h} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2f\mu^2 + g}{\sqrt{4hf - g^2}}\right) + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2f\nu^2 + g}{\sqrt{4hf - g^2}}\right) = \text{const.}$$

Si l'on prend la tangente trigonométrique des deux membres, et qu'on revienne aux coordonnées rectilignes, on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - B^2 = k(B_1^2 - Ax^2 - y^2 - z^2),$$

dans laquelle A, B, B_1 sont des fonctions des constantes de la question α, β, γ et des axes de l'ellipsoïde, et k est la constante introduite par l'intégration. Cette équation représente une série de surfaces assujetties à passer par l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré concentriques : on reconnaît que cette intersection est un cercle. Cette série de surfaces coupe la surface ellipsoïde suivant des courbes conjuguées des courbes proposées.

125. PROBLÈME XV. — *Courbes conjuguées des sections circulaires de l'ellipsoïde.*

Si l'on opère sur l'équation différentielle de ces sections qui est

$$\frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} = \frac{d\nu}{\sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

on obtient pour équation différentielle des conjuguées

$$\frac{d\mu}{(\mu^2 - b^2)\sqrt{c^2 - \mu^2}} \pm \frac{d\nu}{(\nu^2 - b^2)\sqrt{c^2 - \nu^2}} = 0.$$

Comme l'intégrale de cette équation ne rentre dans aucun des types précédemment trouvés, nous indiquons la marche à suivre : on prendra, pour intégrer le premier terme, une variable auxiliaire φ liée avec μ par la relation $\mu = c \sin\varphi$: ce premier terme devient

$$-\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{1}{b^2 + (b^2 - c^2)\tang^2\varphi},$$

qui est la différentielle exacte de la fonction

$$\frac{1}{b\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arc}\left(\tang = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b} \tang\varphi\right);$$

donc l'intégrale de l'équation différentielle proposée sera, en revenant aux variables μ et ν,

$$\operatorname{arc}\left(\tang = \frac{\mu\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - \mu^2}}\right) + \operatorname{arc}\left(\tang = \frac{\nu\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - \mu^2}}\right) = \text{const.}$$

Si, maintenant, on prend la tangente trigonométrique des deux membres, et qu'on élève au carré en représentant par k une constante, on trouve

$$c^2(\mu^2 + \nu^2) - 2\mu^2\nu^2 + 2\mu\nu\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$$
$$= k^2\left[b^2\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2} + (b^2 - \nu^2)\mu\nu\right]^2;$$

si l'on passe aux coordonnées rectilignes, on obtient l'équation d'une surface du second degré que l'on peut écrire sous la forme suivante, k_1 étant une nouvelle constante :

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = k_1^2\left[\frac{bz}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \mp \frac{x\sqrt{c^2 - b^2}}{\lambda}\right]^2.$$

Elle représente une série de surfaces ayant une même courbe de contact, laquelle n'est autre chose que l'intersection du plan des sections circulaires de l'ellipsoïde donné, passant par l'axe des y, et d'un ellipsoïde concentrique, ayant même axe maximum, même axe suivant oz et dont l'axe suivant oy serait $\sqrt{\lambda^2 - b^2 - c^2}$.

Ces surfaces coupent l'ellipsoïde suivant une série de courbes planes qui sont les lignes conjuguées des sections circulaires. Ces courbes planes sont données par la série des plans dont on obtient l'équation, en retranchant l'équation de l'ellipsoïde proposé de l'équation précédente :

$$\frac{c}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{\lambda^2 - b^2 - c^2}} - k_1 \left(\frac{bz}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \mp \frac{x\sqrt{c^2 - b^2}}{\lambda} \right) = 0.$$

Il est aisé de reconnaître que tous ces plans passent par une des deux droites qui est l'intersection du plan des zx et de l'un des deux plans des sections circulaires de l'ellipsoïde proposé qui contiennent l'axe des y. On déduit de là le théorème suivant :

Théorème. — *Si par chacune des deux droites d'intersection des deux plans des sections circulaires qui passent par l'axe moyen de l'ellipsoïde, avec le plan de la section principale moyenne de cette surface, on mène tous les plans possibles, leurs intersections avec l'ellipsoïde seront conjuguées des sections circulaires.*

CHAPITRE III.

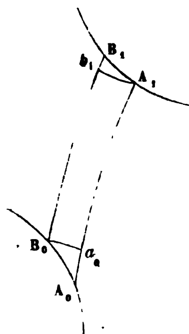
DES LIGNES QUI DÉPENDENT DES COURBURES TANGENTIELLES DES LIGNES COORDONNÉES.

126. Les lignes qui dépendent des courbures tangentielles propres ou inclinées des lignes coordonnées sont généralement exprimées par des équations différentielles du second ordre; mais elles ont ce caractère essentiel qu'elles ne dépendent que des variations des paramètres différentiels du premier ordre, ce qui permet de composer ces équations dans un système quelconque dès que l'expression du déplacement ds est connue dans ce système.

§ 1. — De la ligne géodésique.

Problème I. — *Quel est le plus court chemin sur une surface entre deux courbes* S_0 *et* S_1 *tracées sur cette surface* (*fig.* 11)?

Fig. 11.



Soit $d\sigma$ l'élément de l'arc de la ligne cherchée $A_0 A_1$, il faut que l'on ait

$$\delta \int_{S_0}^{S_1} d\sigma = 0;$$

ce qui donne

$$(\delta\sigma)_1 - (\delta\sigma)_0 + \int_{S_0}^{S_1} \delta\, d\sigma = 0;$$

or, l'on mène une série de lignes orthogonales entre $A_0 A_1$ et sa position infiniment voisine; soit $d\sigma_1$ l'élément de ces orthogonales, l'on a, d'après le n° 29,

$$\delta\, d\sigma = \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{R};$$

d'une autre part

$$(d\sigma)_1 = dS_1 \cos[dS_1, (d\sigma)_1], \quad (d\sigma)_0 = dS_0 \cos[dS_0, (d\sigma)_0]:$$

donc l'équation précédente deviendra

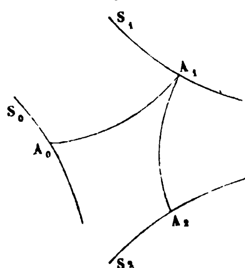
$$dS_1 \cos[dS_1, (d\sigma)_1] - dS_0 \cos[dS_0, (d\sigma)_0] + \int_{S_0}^{S_1} \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{R} = 0.$$

L'intégrale devant être nulle quel que soit $d\sigma_1$, et la partie indépendante de l'intégrale devant être nulle, quels que soient dS_1 et dS_0, l'on a les conditions

$$\frac{1}{R} = 0, \quad \cos[dS_1, (d\sigma)_1] = 0, \quad \cos[dS_0, (d\sigma)_0] = 0;$$

donc, la ligne minimum est celle dont la courbure tangentielle est nulle. C'est la ligne géodésique. La condition relative aux limites est qu'elle soit perpendiculaire aux lignes S_0 et S_1.

Fig. 12.



Problème II. — *Trouver un point sur la courbe S_1, tel que la somme des chemins $A_0 A_1 + A_1 A_2$ parcourus sur la surface de ce point aux deux courbes S_0, S_2, soit un minimum* (*fig.* 12).

Soit $d\sigma$ l'élément du chemin parcouru A_0A_1, et $d\sigma'$ l'élément du chemin A_1A_2; il faut que l'on ait

$$\delta\int_{S_0}^{S_1} d\sigma + \delta\int_{S_1}^{S_2} d\sigma' = 0;$$

donc, en raisonnant comme nous venons de le faire, nous trouverons

$$dS_0\cos[(d\sigma)_0, dS_0] + dS_1\{\cos[dS_1, (d\sigma)_1] + \cos[dS_1, (d\sigma')_1]\}$$
$$+ dS_2[\cos dS_2, (d\sigma')_2] + \int_{S_0}^{S_1}\frac{d\sigma_1\, d\sigma}{R} + \int_{S_1}^{S_2}\frac{d\sigma'_1\, d\sigma'}{R'} = 0.$$

On a donc deux arcs géodésiques $A_1A_0 + A_1A_2$, et la condition relative aux limites est qu'ils soient orthogonaux aux lignes extrêmes S_0, S_2, et qu'ils fassent sur la courbe moyenne S_1, l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion.

Les conséquences sont nombreuses, nous y reviendrons plus tard.

127. *Équation différentielle de la courbe géodésique.* — Si dans l'équation (7) du n° 49, nous supposons la courbure tangentielle $\frac{1}{P}$ nulle, nous aurons

$$(1)\qquad d_0(d\sigma_1\cos\beta) - d_1(d\sigma\cos\alpha) = 0,$$

qui est l'équation la plus simple des lignes géodésiques, bien qu'elle se rapporte à un système quelconque de coordonnées. Si l'on développe les différentiations après avoir remplacé $d\sigma$ et $d\sigma_1$ par leurs valeurs $H\,d\rho$, $H_1\,d\rho_1$, on trouve

$$\cos\beta\frac{dH_1}{d\rho} - \cos\alpha\frac{dH}{d\rho_1} = H_1\sin\beta\frac{d\beta}{d\rho} - H\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\rho_1};$$

or, l'on a

$$(2)\qquad \left(\frac{H\,d\rho}{\sin\beta} = \frac{H_1\,d\rho_1}{\sin\alpha},\quad \alpha+\beta=\varphi\right);$$

d'où on déduit

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&\cos\alpha\sin\beta\frac{dH}{H\,d\rho_1}d\rho_1 - \cos\beta\sin\alpha\frac{dH_1}{H_1\,d\rho}d\rho\\ &\quad = \sin\alpha\sin\beta\left(\frac{d\alpha}{d\rho_1}d\rho_1 - \frac{d\beta}{d\rho}d\rho\right),\end{aligned}\right.$$

qui est l'équation différentielle des lignes géodésiques. L'élimination de α et β de cette équation, au moyen des relations (2), dans lesquelles φ est une fonction connue de ρ, ρ_1, porterait cette équation différentielle au second ordre, mais il est plus commode de la laisser sous cette forme.

Si le système est orthogonal, elle devient

$$(3') \quad \cos^2\alpha \frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}\,d\rho_1}\,d\rho_1 - \sin^2\alpha \frac{d\mathrm{H}_1}{\mathrm{H}_1\,d\rho}\,d\rho - \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha = 0,$$

$d\alpha$ étant la différentielle complète par rapport à ρ et à ρ_1.

128. *Intégrales premières.* — 1° Si l'angle φ est constant, et H ne dépend que de ρ, l'on peut toujours supposer $\mathrm{H} = 1$, ce qui revient à prendre σ pour paramètre, et, en remarquant que

$$\frac{d\alpha}{d\rho_1}\,d\rho_1 = -\frac{d\beta}{d\rho_1}\,d\rho_1,$$

l'équation (3) devient

$$(3'') \qquad \frac{d\mathrm{H}_1}{\mathrm{H}_1\,d\rho}\,d\rho = \frac{\sin\beta\,d\beta}{\cos\beta},$$

$d\beta$ étant une différentielle complète; on a donc, si H_1 ne dépend que de ρ,

$$(4) \qquad \mathrm{H}_1\cos\beta = \text{const.},$$

ce qui est une intégrale première.

L'équation (3″) peut aussi s'écrire, après élimination de $\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$, au moyen des relations (1) du n° 44, sous la forme

$$(3''') \qquad \frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho}\left(d\rho_1 + \frac{\cos\varphi}{\mathrm{H}_1}\,d\rho\right) = \sin\varphi\,d\beta.$$

Or, si H_1 est de la forme $\rho\psi(\rho_1)$, cette équation devient

$$\psi(\rho_1)\,d\rho_1 + \cos\varphi\,\frac{d\rho}{\rho} = \sin\varphi\,d\beta,$$

laquelle donne

$$(4') \qquad \beta\sin\varphi - \cos\varphi\log\rho - \int\psi(\rho_1)\,d\rho_1 = \text{const.}$$

2° Si φ est variable, et ne dépend que de ρ, l'équation (4) a encore lieu; en effet, l'équation différentielle (3″) a lieu pourvu que l'on retranche de $d\beta$ le terme $\frac{d\varphi}{d\rho}d\rho$; l'on obtient ainsi

$$\frac{dH_1}{H_1\,d\rho}d\rho = \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos(\varphi-\alpha)}\left(\frac{d\varphi}{d\rho}d\rho - d\alpha\right).$$

Or, elle est intégrable, si φ et H_1 sont des fonctions de ρ seulement; on obtient ainsi

$$H_1\cos(\varphi-\alpha) = \text{const.},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$H_1\cos\beta = \text{const.}$$

3° Cherchons les conditions d'intégrabilité de l'équation (3′). Soit l'intégrale de cette équation

$$U = F(\rho, \rho_1, \alpha) = 0;$$

il faut que l'on ait, après que les dénominateurs de l'équation (3) auront été chassés, les trois conditions suivantes :

$$\frac{dHH_1}{d\rho_1} = 2\frac{H_1\,dH}{d\rho_1}, \quad \frac{dHH_1}{d\rho} = 2\frac{H\,dH_1}{d\rho},$$

$$-\cos^2\alpha\frac{d}{d\rho}\left(\frac{H_1\,dH}{d\rho_1}\right) = \sin^2\alpha\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{H\,dH_1}{d\rho}\right).$$

Or les deux premières seront satisfaites si $H = H_1$, la dernière condition devient alors

$$\frac{d^2H^2}{d\rho\,d\rho_1} = 0;$$

l'intégrale de cette dernière est, ψ et ψ_1 étant des fonctions arbitraires,

$$H^2 = \psi(\rho) + \psi_1(\rho_1).$$

Si l'on adopte ces conditions pour H et H_1, l'équation (3) devient

$$[\psi(\rho)+\psi_1(\rho_1)]\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha + \sin^2\alpha\,\psi(\rho)\,d\rho - \cos^2\alpha\,\psi_1(\rho_1)\,d\rho_1 = 0,$$

qui est la différentielle exacte de

$$\sin^2\alpha\psi(\rho) - \cos^2\alpha\psi_1(\rho) = \text{const.}$$

4° Supposons que φ ne dépende que de l'une des deux variables ρ ou ρ_1, que I_1 (n° 25) ne dépende que de ρ_1, et I ne dépende que de ρ, de telle sorte que l'on ait

$$I_1 = \frac{d\rho_1}{f_1(\rho_1)}, \quad I = \frac{d\rho}{f(\rho)},$$

l'on obtiendra alors, suivant que φ ne dépendra que de ρ ou de ρ_1, d'après les équations (6) du n° 47, l'une des deux expressions

$$\alpha - \int \frac{d\rho_1}{f_1(\rho_1)} + \int \frac{d\rho}{f(\rho)} = \text{const.},$$

$$\beta + \int \frac{d\rho_1}{f_1(\rho_1)} - \int \frac{d\rho}{f(\rho)} = \text{const.},$$

pour représenter l'intégrale première de l'équation géodésique.

Il est évident que ces deux équations auraient encore lieu, si I et J_1 (n° 25) étaient, la première une fonction de ρ seulement, et la seconde une fonction de ρ_1, ou bien, si I_1 et J ne dépendaient, la première que de ρ_1, et la seconde que de ρ. Il suffit de remonter aux équations (5′) du n° 47, d'y faire $\frac{1}{\mathrm{P}}$ nul, et d'intégrer l'une ou l'autre de ces deux équations.

129. Problème III. — *Ligne géodésique de la surface héliçoïdale.*

Nous prendrons l'expression de l'arc ds, rapportée aux coordonnées t et μ que nous avons trouvées au n° 87 (on y supprimera, pour abréger, l'indice 1 de μ_1),

$$ds^2 = (t^2 + a^2)\,d\mu^2 + \left(\frac{t^2\psi'^2}{a^2 + t^2} + 1\right) dt^2;$$

or, pour cette forme, l'on a l'intégrale première de la ligne géodésique égale à

$$\sqrt{t^2 + a^2}\cos\beta = k,$$

k étant une constante; mais, dans ce système de coordonnées,

$$\cos^2\beta = \frac{(t^2+a^2)\,d\mu^2}{(t^2+a^2)\,d\mu^2 + \left(\dfrac{t^2\psi'^2}{a^2+t^2}+1\right)dt^2};$$

donc l'équation différentielle du premier ordre des lignes géodésiques est

$$d\mu = \frac{k(t^2\psi'^2+a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt}{(a^2+t^2)\sqrt{t^2+a^2-k^2}};$$

de là on tire, μ_0 étant la constante de l'intégration,

$$\mu - \mu_0 = k\int \frac{\sqrt{t^2(\psi'^2+1)+a^2}}{(a^2+t^2)\sqrt{t^2+a^2-k^2}}\,dt,$$

qui est l'équation de la ligne géodésique entre les variables μ et t. Si l'on veut avoir cette équation entre les variables t et θ, il faut éliminer μ entre cette équation et l'équation (1) du n° 87 : ce qui donne

$$\theta - \mu_0 = -a\int \frac{\psi'(t)}{(a^2+t^2)}\,dt + k\int \frac{\sqrt{t^2(1+\psi'^2)+a^2}}{(a^2+t^2)\sqrt{t^2+a^2-k^2}}\,dt$$

pour l'équation de la ligne géodésique.

Applications a quelques exemples : 1° *Héliçoïde à plan directeur.* — Il faut faire

$$\psi(t) = \text{const.},$$

ce qui donne

$$\mu - \mu_0 = k\int \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}\sqrt{t^2+a^2-k^2}};$$

il y a trois cas à distinguer, suivant que k^2 est supérieur, inférieur ou égal à a^2. Dans ce dernier cas, l'on a

$$\mu - \mu_0 = \int \frac{a\,dt}{t\sqrt{t^2+a^2}};$$

si l'on remarque que l'intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\int \frac{a\,dt}{t^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{t^2}}} = -\int \frac{d\left(\frac{a}{t}\right)}{\sqrt{1+\frac{a^2}{t^2}}},$$

on trouve, c étant la constante arbitraire,

$$\mu - \mu_0 = \log \frac{\frac{t}{c}}{a \pm \sqrt{a^2+t^2}};$$

on a donc, en résolvant l'équation par rapport à t,

$$t = \frac{2ac}{c^2 e^{(\mu-\mu_0)} - e^{-(\mu-\mu_0)}};$$

or, dans le cas actuel, μ n'est pas distinct de θ, comme cela résulte de l'équation en θ.

2° Soit l'héliçoïde engendré par la courbe donnée par l'équation suivante, dans laquelle m et n sont deux constantes liées entre elles par la relation $n^2(m^2-1) = m^2 k^2$:

$$\frac{2a}{\sqrt{m^2-1}}(z - z_0) = t\sqrt{n^2+t^2} - n^2 \log\left(n + \sqrt{n^2+t^2}\right);$$

l'équation de la ligne géodésique est, t_0 étant une constante arbitraire,

$$t - t_0 = a \operatorname{tang} \frac{1}{km}(\mu - \mu_0),$$

les variables étant t et μ.

130. Problème IV. — *Ligne géodésique des surfaces développables.*

Prenons pour coordonnées les génératrices rectilignes et les lignes orthogonales. Soit

$$ds' = \psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

l'arc de l'arête de rebroussement, $d\varepsilon$ étant l'angle de contingence de cette ligne; si l'on conserve les notations employées au n° 105, l'équation de la ligne qui coupe orthogonalement

les génératrices rectilignes est

$$s' + t = \rho_1;$$

donc l'expression du déplacement ds sera

$$(1) \qquad ds^2 = (\rho_1 - s')^2 d\varepsilon^2 + d\rho_1^2,$$

avec la relation

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{d\rho_1}{(\rho_1 - s')\,d\varepsilon}.$$

Si l'on applique à ces expressions l'équation (3″)

$$\frac{dH}{H\,d\rho_1} = \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\cos\alpha},$$

on trouve

$$d\alpha = d\varepsilon;$$

de là on conclut

$$\alpha = \varepsilon,$$

avec cette condition que ε est nul en même temps que α, ce qui exige que ε soit compté à partir de la génératrice sur laquelle la ligne géodésique est perpendiculaire. Cela posé, l'équation (3″) donne

$$(2) \qquad \frac{d\rho_1}{\rho_1 - s'} = \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{ds' + dt}{t};$$

on déduit

$$ds'\cos\alpha + d(t\cos\alpha) = 0,$$

et, en intégrant,

$$(3) \qquad t\cos\alpha - t_0 + \int_0^\alpha \cos\alpha . \psi'(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

t_0 étant la constante introduite par l'intégration, elle représente la longueur de la génératrice perpendiculaire à la ligne géodésique.

Soient x', y', z' les coordonnées du point que l'on considère sur l'arête de rebroussement, x, y, z les coordonnées du point correspondant de la ligne géodésique située sur la même génératrice, l'on a

$$(4) \qquad x = x' + t\frac{dx'}{ds'} \quad [3],$$

dans lesquelles x', y', z' et leurs dérivées sont connues par rapport à ε, ou son égal α, par la nature même de l'arête de rebroussement, et t se trouve connu en fonction de la même variable par suite de l'équation (3); on a donc, en termes finis, les trois équations de la ligne géodésique de la surface développable.

Il y a une autre manière de traiter la question. Cette manière consiste à chercher, comme nous l'avons fait n° 110, les équations d'une surface quelconque engendrée par une droite située dans un plan qui s'enroule sur la surface développable donnée. Cette droite engendre une autre surface développable dont l'arête de rebroussement est située sur la surface développable donnée, et cette arête de rebroussement n'est autre chose que la ligne géodésique de cette surface. Il n'y a donc qu'à écrire les équations de cette arête de rebroussement.

131. Applications : *Ligne géodésique de l'héliçoide développable.* — Les équations de l'arête de rebroussement sont, a et λ étant constants,

$$x' = a\cos\theta,\quad y' = a\sin\theta,\quad z' = a\theta\,\mathrm{tang}\,\lambda;$$

de là on déduit

$$ds' = \frac{a}{\cos\lambda}\,d\theta;$$

or, l'on a

$$\frac{ds'}{d\varepsilon} = \frac{a}{\cos^2\lambda},$$

donc

$$d\varepsilon = d\theta\cos\lambda,\quad \varepsilon = \theta\cos\lambda,$$

ε étant compté à partir de la tangente de la courbe perpendiculaire à l'axe des x :

$$t = \frac{t_0\cos^2\lambda + a\sin\alpha}{\cos\alpha\cos^2\lambda}.$$

Conséquemment, les équations de la ligne géodésique sont, après avoir posé $m = \cos\lambda$,

$$t = \frac{t_0 m^2 + a\sin m\theta}{m^2\cos m\theta},$$

$$x = a\cos\theta - tm\sin\theta,\quad y = a\sin\theta + tm\cos\theta,$$
$$z = a\theta\,\text{tang}\,\lambda + t\sin\lambda,$$

dans lesquelles il faut remplacer t par sa valeur en fonction de θ.

Ici la ligne géodésique est perpendiculaire sur la tangente à l'origine de l'arête de rebroussement, et t_0 est la longueur comprise sur cette tangente, entre le point de l'arète et le point d'intersection de la tangente avec la ligne géodésique.

2° *Ligne géodésique de la surface développable dont l'arête de rebroussement est la spirale logarithmique conique.* — Les équations de l'arête de rebroussement sont, m, n, a étant des constantes,

$$x' = t\cos\theta,\quad y' = t\sin\theta,\quad z' = mt,\quad t = ae^{n\theta};$$

on déduit

$$ds'^2 = (1 + n^2 + m^2)\,t^2 d\theta^2.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$1 + n^2 + m^2 = k^2,$$

l'on a

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{-\sin\theta + n\cos\theta}{k},\quad \frac{dy'}{ds} = \frac{+\cos\theta + n\sin\theta}{k},\quad \frac{dz'}{ds} = \frac{m}{k};$$

conséquemment

$$\frac{ds'}{d\varepsilon} = \frac{k^2 t}{\sqrt{1 + n^2}};$$

de là résulte

$$d\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + n^2}}{k}\,d\theta,\quad \varepsilon = \frac{\sqrt{1 + n^2}}{k}(\theta - \theta_0).$$

Posons

$$\frac{nk}{\sqrt{1 + n^2}} = \lambda,$$

on obtient

$$\int_0^\alpha \cos\alpha\,\psi'(\alpha)\,d\alpha = \frac{k\lambda}{n}\int_0^\alpha e^{\lambda\alpha}\cos\alpha\,d\alpha;$$

et, en effectuant les intégrations,

$$\int_0^\alpha \cos\alpha\psi'(\alpha)\,d\alpha = \frac{k\lambda a}{(\lambda^2+1)n}\left[e^{\lambda\alpha}(\lambda\cos\alpha+\sin\alpha)-\lambda\right];$$

donc

$$t = \frac{t_0}{\cos\alpha} - \frac{k\lambda a}{(\lambda^2+1)n}\left[e^{\lambda\alpha}(\lambda+\operatorname{tang}\alpha) - \frac{\lambda}{\cos\alpha}\right],$$

et finalement

$$x = ae^{n\theta}\cos\theta + t\,\frac{n\cos\theta-\sin\theta}{k},$$

$$y = ae^{n\theta}\sin\theta + t\,\frac{n\sin\theta+\cos\theta}{k},$$

$$z = \frac{am}{n}e^{n\theta} + \frac{tm}{k}.$$

132. *Ligne géodésique des surfaces coniques.* — Pour passer aux surfaces coniques, il suffit de considérer, dans les formules (4) du n° **130**, x', y', z' comme les coordonnées du sommet, $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$ comme les cosinus des angles qu'une génératrice rectiligne fait avec les trois axes, et de faire la fonction $\psi(\varepsilon)$ nulle; alors, l'équation (3) du n° **130** donne

$$t\cos\alpha = t_0.$$

1° *Application au cône circulaire droit.* — L'on a, 2γ étant l'angle du cône, pour les cosinus des angles de la génératrice avec les trois axes,

$$\sin\gamma\cos\theta,\quad \sin\gamma\sin\theta,\quad \cos\gamma;$$

si le sommet se trouve à l'origine des coordonnées, les équations de la géodésique seront, en remarquant que $\alpha = \theta\sin\gamma$, et en posant $m = \sin\gamma$,

$$x = \frac{t_0\sin\gamma\cos\theta}{\cos m\theta},\quad y = \frac{t_0\sin\gamma\sin\theta}{\cos m\theta},\quad z = \frac{t_0\cos\gamma}{\cos m\theta}.$$

2° *Application au cône* $\sin\psi = f(\theta)$. — On suppose toujours que le plan des zx est perpendiculaire à la géodésique

au point où ce plan rencontre la courbe. Si l'on coupe le cône par une sphère concentrique, l'intersection sera une courbe dont l'arc compté à partir du plan des xz jusqu'à la génératrice que l'on considère aura pour expression

$$S = \int_0^\theta d\theta \sqrt{\frac{d\psi^2}{d\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\psi}}.$$

Or cette expression qui est une fonction de θ, $S = F(\theta)$, n'est autre chose que la valeur de l'angle α; on aura donc

$$x = \frac{t_0 \sin\gamma \cos\theta}{\cos F(\theta)}, \quad y = \frac{t_0 \sin\gamma \sin\theta}{\cos F(\theta)}, \quad z = \frac{t_0 \cos\gamma}{\cos F(\theta)},$$

pour représenter les équations de la géodésique conique.

133. Problème V. — *Trouver la ligne géodésique ellipsoïdale.*

Il a été démontré (n° 128, 3°) que lorsque les paramètres H^2 et H_1^2 étaient égaux et de la forme $\psi(\rho) + \psi_1(\rho_1)$, l'équation de la ligne géodésique admettait une intégrale première. Il en sera de même, si l'on a

$$d\sigma^2 = [\psi(\rho) + \psi_1(\rho_1)][f(\rho)]^2 d\rho^2,$$
$$d\sigma_1^2 = [\psi(\rho) + \psi_1(\rho_1)][f_1(\rho_1)]^2 d\rho_1^2;$$

il suffira de poser

$$f(\rho)\,d\rho = du, \quad f_1(\rho_1)\,d\rho_1 = dv;$$

on tirera de là ρ en fonction de u, et ρ_1 en fonction de v, conséquemment on aura, U étant une fonction de u, et V une fonction de v,

$$d\sigma^2 = (U + V)\,du^2, \quad d\sigma_1^2 = (U + V)\,dv^2.$$

Donc le théorème serait applicable après cette transformation, c'est-à-dire qu'on aurait

$$U \sin^2\alpha - V \cos^2\alpha = \text{const.}$$

pour l'intégrale première de la ligne géodésique; donc en revenant aux premières variables, l'on aura encore

$$\psi(\rho)\sin^2\alpha - \psi_1(\rho_1)\cos^2\alpha = \text{const.}$$

pour l'intégrale première de la ligne géodésique.

Si maintenant nous remarquons que les valeurs des arcs coordonnés $d\sigma$, $d\sigma_1$, tracés sur la surface ellipsoïdale dans le système des coordonnées elliptiques, satisfont à cette condition, on voit que l'intégrale première des lignes géodésiques ellipsoïdales sera, μ_1^2 étant la constante arbitraire,

$$\mu^2 \cos^2\beta + \nu^2 \sin^2\beta = \mu_1^2.$$

Cette équation a été donnée par M. Liouville. Si l'on y fait $\beta = 0$, on trouve $\mu = \mu_1$; donc μ_1 est la valeur du demi grand axe de la surface $F(\mu_1)$, qui, par son intersection avec l'ellipsoïde, détermine la ligne de courbure de la série (μ), à laquelle la ligne géodésique est tangente, pourvu que μ_1^2 soit plus grand que b^2; si l'on a $\mu_1 = b$, l'on obtient l'hyperboloïde limite de la série $F(\mu)$, c'est-à-dire l'hyperbole focale, donc alors, la ligne géodésique passe par l'un des ombilics; si μ_1 est moindre que b, elle représente le demi grand axe de l'hyperboloïde à deux nappes de la série $F(\nu)$, lequel dônne la ligne de courbure tangente à la ligne géodésique.

On reconnaît que pour tout point d'une ligne géodésique le produit de la perpendiculaire au plan tangent en ce point menée du centre de l'ellipsoïde, par le diamètre ellipsoïdal parallèle à la tangente à la ligne géodésique, reste invariable. Cette propriété est le caractère géométrique des lignes géodésiques. En effet, si l'on calcule le diamètre D parallèle à l'élément de la ligne géodésique, on trouve, en se reportant au n° **122**,

$$\frac{1}{D^2} = \frac{\cos^2\beta}{\lambda^2 - \nu^2} + \frac{\sin^2\beta}{\lambda^2 - \mu^2};$$

cette expression multipliée par l'équation qui donne la valeur de $\frac{1}{M^2}$ au même numéro, donne pour la ligne géodésique l'équation

$$DM = \text{const.}$$

Le rayon de courbure de cette ligne sera donné par la formule

$$\frac{1}{\mathfrak{R} M^3} = \frac{\lambda^2 - \mu_1^2}{h^6},$$

laquelle prouve que, pour une même ligne géodésique tangente à une même ligne de courbure μ_1, le rayon de courbure de la section normale est en raison inverse du cube de la distance du centre de la surface au plan tangent au point que l'on considère.

L'équation différentielle de la ligne géodésique s'obtient en éliminant l'angle ϑ entre l'équation trouvée plus haut et l'équation

$$\tang \vartheta = \frac{m\,d\mu}{n\,d\nu},$$

dans laquelle on pose, pour abréger,

$$m^2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}, \quad n^2 = \frac{\lambda^2 - \nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)};$$

on obtient ainsi

$$\frac{m\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \mu_1^2}} + \frac{n\,d\nu}{\sqrt{\mu_1^2 - \nu^2}} = 0,$$

dans laquelle les variables sont séparées (*).

On trouvera pour la différentielle de l'arc de cette courbe, en remarquant que ds est la somme des projections de $d\sigma$, $d\sigma_1$ sur cet élément

$$ds = m\sqrt{\mu^2 - \mu_1^2}\,d\mu + n\sqrt{\mu_1^2 - \nu^2}\,d\nu.$$

§ II. — DES LIGNES DONT LA COURBURE TANGENTIELLE EST DONNÉE.

134. *Équation différentielle de la courbe.* — Soit $\frac{1}{P}$ la courbure géodésique donnée, et représentant une fonction quelconque des variables ρ et ρ_1, on déduit de l'équation (7) du n° 49,

$$\frac{HH_1}{P}\sin\omega = \frac{dH_1}{d\rho}\cos\vartheta - \frac{dH}{d\rho_1}\cos\alpha$$
$$-\left(H\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{d\rho} - H\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{d\rho_1}\right);$$

(*) Voyez, pour les angles et les polygones géodésiques des surfaces de l'ellipsoïde, nos *Recherches sur les surfaces du second ordre*, 2e Partie, p. 57, et, pour la forme nouvelle de l'équation géodésique, la page 77.

or, l'on a

$$(1)\qquad \frac{\sin\alpha\, d\rho}{H_1} = \frac{\sin\beta\, d\rho_1}{H};$$

donc, si l'on multiplie ces deux équations membre à membre, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{H_1}{P}\sin\beta\, d\rho_1 &= \frac{H}{P}\sin\alpha\, d\rho \\ &= \left(\frac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\varphi}\,\frac{dH_1}{H_1\, d\rho}\, d\rho - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\varphi}\,\frac{dH}{H\, d\rho_1}\, d\rho_1\right) \\ &\quad - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\varphi}\left(\frac{d\beta}{d\rho}\, d\rho - \frac{d\alpha}{d\rho_1}\, d\rho_1\right), \end{aligned}\right.$$

qui est l'équation différentielle demandée. L'élimination de α de cette équation au moyen de la relation (1) et de la relation $\varphi = (\alpha + \beta)$, φ étant une fonction connue des paramètres ρ, ρ_1, porterait l'équation (2) au second ordre, mais il est plus commode de la laisser sous cette forme.

Nous ferons maintenant les remarques suivantes :

1° Si les lignes coordonnées se coupent sous angle constant, le second facteur du dernier terme se réduit à $d\alpha$, différentielle complète de α par rapport à ρ et à ρ_1.

2° Si le système est orthogonal, l'équation (2) devient

$$(2')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{H_1}{P}\sin\beta\, d\rho_1 &= \frac{H}{P}\sin\alpha\, d\rho \\ &= \frac{\sin^2\alpha}{H_1}\,\frac{dH_1}{d\rho}\, d\rho - \frac{\cos^2\alpha}{H}\,\frac{dH}{d\rho_1}\, d\rho_1 \\ &\quad + \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha, \end{aligned}\right.$$

$d\alpha$ étant une différentielle complète.

3° Si l'angle φ étant constant ou fonction de l'une des deux variables, ρ par exemple, H et H_1 ne dépendent que de cette variable ρ, l'équation (2) prend la forme

$$(2'')\qquad \frac{HH_1\sin\varphi}{P}\, d\rho = d(H_1\cos\beta);$$

de là résulte que, si P est une fonction du produit $H_1\cos\beta$,

$$P = F'(H_1\cos\beta),$$

ou bien que, si le rapport de P à $HH_1 \sin\varphi$ est une fonction F′ du même produit, F′ étant la dérivée de F, on aura, suivant l'un des deux cas,

$$F(H_1\cos\beta) - \int HH_1 \sin\varphi\, d\rho = \text{const.},\quad F(H_1\cos\beta) - \rho = \text{const.},$$

qui seront les intégrales premières de l'équation (2″). Il en sera de même si l'on a

$$P = F(\rho)\quad \text{ou bien}\quad P = \cos^m\beta F(\rho),$$

m étant un nombre entier quelconque; les deux membres de l'équation (2″) seront intégrables.

4° Soit φ constant, et le système choisi de telle sorte que H soit l'unité, ce qui est toujours possible, puisqu'il n'y a qu'à prendre pour secondes lignes celles qui déterminent sur les lignes de la première série des longueurs constantes; si, de plus, H_1 remplit cette condition qu'elle soit égale au produit de ρ par une fonction quelconque de ρ_1, $H_1 = \rho\psi'(\rho_1)$, ψ' étant la dérivée de ψ, l'équation (2) devient

$$\frac{\sin\varphi}{P\sin\beta}\, d\rho = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\, \frac{dH_1}{H_1\, d\rho}\, d\rho - d\beta.$$

Si l'on élimine de cette équation $\cot\beta$, au moyen de la relation

$$\cot\beta = \frac{H_1\, d\rho_1 + \cos\varphi\, d\rho}{\sin\varphi\, d\rho},$$

on trouve, réductions faites, l'équation différentielle

$$(2''')\qquad \frac{\sin\varphi}{P\sin\beta}\, d\rho = \frac{\psi'(\rho_1)}{\sin\varphi}\, d\rho_1 + \cot\varphi\, \frac{d\rho}{\rho} - d\beta;$$

de là résulte que, si l'on a $P\sin\beta$ égale à une fonction de ρ, représentée par $\frac{1}{f'(\rho)}$, l'équation précédente s'intégrera et donnera

$$\sin^2\varphi f(\rho) - \psi(\rho_1) - \cos\varphi \log\rho - \beta\sin\varphi = \text{const.},$$

laquelle sera l'intégrale première de la courbe.

135. Problème VI. — *Trouver sur une surface de révolution la ligne dont la courbure tangentielle est donnée.*

Pour cette surface, l'on a, en conservant la notation du n° 89, et en posant $t = \rho$, $\theta = \rho_1$,

$$d\sigma = dt\sqrt{1+\psi'^2}, \quad d\sigma_1 = t d\theta, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

D'après la remarque 3 du numéro précédent, l'on a

$$(2) \qquad \frac{t\sqrt{1+\psi'^2}}{P} dt = d(t\cos\beta);$$

si l'on pose l'un des deux cas

$$\frac{P}{t\sqrt{1+\psi'^2}} = F'(t\cos\beta), \quad P = F'(t\cos\beta),$$

on obtiendra l'une des deux intégrales

$$t - F(t\cos\beta) = \text{const.}, \quad \int t\,dt\sqrt{1+\psi'^2} - F(t\cos\beta) = \text{const.}$$

Si P est une fonction de t seule, en représentant par $f(t)$ l'intégrale du premier membre de l'équation (2) du présent numéro, on aura

$$f(t) - t\cos\beta = \text{const.}$$

Si P est de la forme $F(t)\cos^m\beta$, l'équation (2) pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{t^{m+1}\sqrt{1+\psi'^2}\,dt}{F(t)} = t^m\cos^m\beta\, d(t\cos\beta);$$

donc, en représentant par $f_1(t)$ l'intégrale du premier membre, on aura, après intégration,

$$f_1(t) - \frac{t^{m+1}\cos^{m+1}\beta}{m+1} = \text{const.}$$

Si, dans les deux premiers cas, on peut résoudre les équations données par les intégrales par rapport à $t\cos\beta$, comme cela arrive pour les deux derniers cas, de telle sorte que l'on ait

$$t\cos\beta = \Psi(t),$$

en portant dans cette équation la valeur de $\cos\beta$ donnée par la relation

$$\cos\beta = \frac{t\,d\xi}{\sqrt{t^2 d\xi^2 - (1-\rho^2)\,dt^2}},$$

on obtiendra sans difficulté

$$d\xi = \frac{f(t)\sqrt{1-\rho^2}}{t\sqrt{t^2 - f(t)^2}}\,dt,$$

laquelle ne dépendra que des quadratures.

136. Problème VII. — *Soit $\frac{1}{P}$ la courbure tangentielle donnée d'une ligne tracée sur une surface réglée, déterminer cette ligne.*

Remarquons que, pour ces sortes de surfaces dans le système que nous avons employé (n° 101), l'on a directement

$$\mathrm{I} = \frac{d\sigma}{\mathrm{R}_1} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \frac{d\sigma}{\mathrm{L}} = d\varepsilon\sin\gamma,$$

puisque l'arc $d\sigma_1$ est rectiligne, et le plan de l'angle ϑ, étant parallele aux deux génératrices rectilignes, est perpendiculaire à la plus courte distance dp; donc, il fait avec le plan tangent un angle complémentaire de l'angle γ; donc la projection tangentielle de cet angle est $d\varepsilon\sin\gamma$.

L'équation (5') du n° 47 donne

$$(1) \qquad d\beta = \left(\frac{dp}{\mathrm{P}\sin\beta\cos\gamma} - d\varepsilon\sin\gamma\right);$$

d'une autre part l'on a (n° 101)

$$(2) \qquad \cot\beta = \frac{d\sigma_1}{d\sigma} = \frac{d\rho_1}{dp}\cos\gamma;$$

conséquemment l'on obtient

$$(3) \qquad \cot\beta\,d\beta = \left(\frac{1}{\mathrm{P}\sin\beta} - \zeta\cos\gamma\sin\gamma\right)d\rho_1;$$

or, si l'on différentie les équations (8) du même numéro, on

trouve

$$(4)\qquad \zeta d\rho_1 = \frac{d\gamma}{\cos^2\gamma} + \frac{d}{d\rho}(q\zeta)d\rho - \rho_1\frac{d\zeta}{d\rho}d\rho.$$

Cette valeur de $d\rho_1$ étant substituée dans l'équation précédente, on obtient

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\cot\beta\, d\beta = \left(\frac{1}{P\sin\beta} - \zeta\cos\gamma\sin\gamma\right)\\ &\qquad\times\left(\frac{d\gamma}{\zeta\cos^2\gamma} + \frac{d}{\zeta d\rho}(q\zeta)d\rho - \rho_1\frac{d\zeta}{\zeta d\rho}d\rho\right);\end{aligned}\right.$$

si l'on groupe convenablement les termes, on obtient l'équation

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &d\left(\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}\right) - \frac{d\gamma}{\zeta P\cos^3\gamma}\\ &\quad + \left(\frac{1}{\zeta P\cos\gamma} - \sin\gamma\sin\beta\right)\left(\frac{\tan\!g\gamma}{\zeta}\frac{d\zeta}{d\rho} - \frac{\zeta dq}{d\rho}\right)d\rho = 0;\end{aligned}\right.$$

si l'on cherche quelle est la courbe pour laquelle on a

$$\frac{1}{P\sin\beta} = \frac{\sin^2\gamma}{t} = \zeta\cos\gamma\sin\gamma,\quad \text{n}^\text{o}\ 101\ (8),$$

on trouve

$$d\left(\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}\right) - \sin\gamma\, d\gamma\left(\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}\right) = 0;$$

dont l'intégrale est $\sin\beta = \text{const.}$ C'est l'équation de la trajectoire sous angle constant des génératrices rectilignes. Dans ce cas, on vérifie facilement la propriété relative à la courbure tangentielle de la trajectoire sous angle constant; en effet, on a, d'après l'équation (5) du n° 64,

$$\frac{1}{P} = \frac{\sin\beta}{R} = \frac{\sin\beta\sin\gamma\, d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{\sin\beta\sin^2\gamma}{t}.$$

137. Applications : 1° *Conoïde droit.* — Pour passer au cas du conoïde droit, il faut faire q nul dans l'équation (6) du n° 136; on obtient ainsi

$$(7)\quad d\left(\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}\right) - \frac{d\gamma}{\zeta P\cos^3\gamma} + \frac{d_1\zeta}{\zeta}\left(\frac{\sin\gamma}{\zeta P\cos^2\gamma} - \frac{\sin^2\gamma\sin\beta}{\cos\gamma}\right) = 0;$$

or, laissons la fonction ζ tout à fait indéterminée, ce qui revient à dire que le conoïde est quelconque, et proposons-nous de déterminer la ligne tracée sur cette surface jouissant de cette propriété, que sa courbure tangentielle satisfasse à l'équation suivante, dans laquelle λ^2 est une fonction de β :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin\gamma}{\zeta P\cos\gamma} - \sin^2\gamma\sin\beta = \lambda^2, \\ \text{ce qui donne} \\ \dfrac{1}{P} = \dfrac{\lambda^2}{t} + \dfrac{\sin^2\gamma\sin\beta}{t}; \end{array}\right.$$

l'équation (7) devient

$$(9)\quad \frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2} = \frac{d\gamma}{\sin\gamma\cos\gamma} - \frac{d\zeta}{\zeta} = d\log\frac{\tan\gamma}{\zeta}:$$

l'intégrale de cette équation sera donc, c étant une constante arbitraire

$$(10)\quad \int\frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2} = \log\frac{\tan\gamma}{c\zeta} = \log\frac{t}{c};$$

on déduit de là

$$(10')\quad t = c e^{\int\frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2}},$$

qui est l'intégrale première de la courbe cherchée. C'est une relation entre le rayon vecteur t et l'angle que la tangente à la courbe fait avec ce rayon vecteur. Si l'on avait l'angle θ que ce rayon vecteur fait avec un plan fixe passant par l'axe, plan qui est ici celui des xz, on aurait ainsi les deux équations de la courbe. Nous allons démontrer que cette relation dépend d'une différentielle du premier ordre.

Remarquons que l'équation (2) du n° 136, modifiée par suite des équations (10) du présent numéro, devient successivement

$$(11)\quad \cot\beta = \frac{dt}{dp}\cos\gamma = \frac{\sin\gamma}{d\varepsilon}\frac{dt}{t} = \frac{\sin\gamma}{d\varepsilon}d\log\left(\frac{\tan\gamma}{\zeta}\right).$$

Cette équation, si l'on a égard à l'équation (9), devient

$$(11')\quad \frac{\sin\beta\, d\beta}{\lambda^2} = \frac{d\varepsilon}{\sin\gamma};$$

or, si l'on porte dans l'équation

$$\operatorname{tang}\gamma = \zeta t$$

la valeur de t tirée de la relation (10'), on obtient

$$\operatorname{tang}\gamma = c\zeta e^{\int \frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2}},$$

d'où on déduit

$$\sin^2\gamma = \frac{c^2\zeta^2 e^{\int \frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2}}}{e^{-\int \frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2}} + c^2\zeta^2 e^{\int \frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2}}};$$

en portant cette valeur dans l'équation (11'), et en remarquant que $d\varepsilon$ est égal à la différentielle $d\theta$ de l'angle que le rayon vecteur t fait avec le plan des xz, on obtient l'équation différentielle

$$d\theta = \frac{\sin\beta\, d\beta}{\lambda^2} \frac{\sqrt{1 + c^2\zeta^2 e^{2\int \frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2}}}}{c\zeta e^{\int \frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2}}},$$

laquelle est du premier ordre. C. Q. F. D.

On reconnaîtra facilement que, si λ^2 est de la forme

$$a \sin^n\beta \cos^m\beta,$$

dans laquelle a, m, n sont trois constantes dont les deux dernières représentent des nombres entiers, l'intégrale de l'équation (10) s'effectue, et on obtient l'équation différentielle de la courbe entre deux variables t et θ. Contentons-nous d'exaner les cas où λ^2 est égal à $\pm \sin\beta$.

Si $\lambda^2 = \sin\beta$, $t = c\sin\beta$; si l'on tire les valeurs des sinus et cosinus de l'angle β de cette dernière équation, et qu'on les porte dans l'équation (11'), on trouve

$$d\theta = \frac{\zeta t\, dt}{\sqrt{1 + \zeta^2 t^2}\sqrt{c^2 - t^2}};$$

si $\lambda^2 = -\sin\beta$, $c = t\sin\beta$, et, par suite,

$$d\theta = \frac{\zeta t\, dt}{\sqrt{1 + \zeta^2 t^2}\sqrt{t^2 - c^2}}.$$

Suivant cette double hypothèse, on trouve que la courbure tangentielle de la ligne est donnée par

$$\frac{1}{P\sin\beta} = \frac{\sin^2\gamma \pm 1}{t}.$$

138. 2° *Héliçoïde gauche.* — Pour obtenir les formules relatives à cette surface, il suffit de faire ζ constant dans les formules précédentes. Supposons que λ^2 est égal à $k^2\cos^2\beta\sin\beta$, k étant une constante, ce qui revient à dire que la courbure $\frac{1}{P}$ satisfait à la relation

$$\frac{1}{P\sin\beta} = \frac{k^2\cos^2\beta - \sin^2\gamma}{t},$$

l'équation (10) donne

$$\operatorname{tang}\beta = \left(\frac{t}{c}\right)^{k^2},$$

c étant une constante introduite par l'intégration. Si l'on suppose k^2 égale à l'unité, l'équation (11) donne

$$c\,d\vartheta = \frac{\zeta t\,dt}{\sqrt{1-\zeta^2 t^2}},$$

dont l'intégrale est

$$t = \sqrt{c^2(\vartheta-\vartheta_1)^2 - \frac{1}{\zeta^2}},$$

ϑ_1 étant une constante arbitraire : cette équation représente la spirale parabolique.

Dans le cas où k^2 a une valeur quelconque, l'équation différentielle de la courbe est

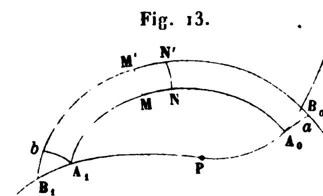
$$c^{k^2}d\vartheta = \zeta\frac{t^{k^2}dt}{\sqrt{1-\zeta^2 t^2}},$$

qui est une différentielle binôme, intégrable toutes les fois que k^2 est tel, que l'une des deux expressions $\frac{k^2-1}{2}$, $\frac{k^2-1}{2} - \frac{1}{2}$ est un nombre entier.

§ III. — De la ligne dont la courbure tangentielle est constante.

139. **Problème VIII.** — *Étant donnée une courbe* A_0PA_1, (S) (*fig.* 13), *tracée sur une surface, trouver sur cette surface une autre courbe* σ *de longueur donnée, telle que l'aire comprise entre les deux courbes soit un maximum.*

Fig. 13.



En conservant les notations du n° 126, l'on doit avoir entre les deux limites S_0, S_1, pour la courbe donnée, la condition

$$\int_{S_0}^{S_1} d\sigma = a,$$

a étant une constante. Si l'on prend une position infiniment voisine, l'on aura

$$\delta \int_{S_0}^{S_1} d\sigma = (d\sigma)_1 - (d\sigma)_0 + \int_{S_0}^{S_1} \delta d\sigma = 0;$$

mais il faut, dans le cas du maximum, que, pour ce déplacement, la variation de l'aire soit nulle. Si l'on représente par $d\sigma_1$ l'élément de toute ligne qui coupe orthogonalement la courbe σ, cette variation sera, comme on le voit sur la figure,

$$\frac{1}{2}(d\sigma\, d\sigma_1)_1 - \frac{1}{2}(d\sigma\, d\sigma_1)_0 + \int_{S_0}^{S_1} d\sigma\, d\sigma_1 = 0.$$

Or puisque les triangles B_1A_1b, A_0aB_0 sont des infiniment petits du second ordre, et que cette seconde variation ajoutée à la première multipliée par une constante b doit être nulle,

on aura l'équation

$$(d\sigma_1)_1 - (d\sigma)_0 + \int_{S_0}^{S_1}\left(\delta d\sigma - \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{b}\right) = 0.$$

Si l'on raisonne, comme on l'a fait au n° **126**, cette équation devient

$$(d\sigma)_1 - (d\sigma)_0 + \int_{S_0}^{S_1} d\sigma\, d\sigma_1\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b}\right) = 0.$$

Or l'intégrale devant être nulle, on trouve $\frac{1}{R} = \frac{1}{b}$, c'est-à-dire la courbe dont la courbure tangentielle est constante.

Les équations aux limites donnent cette double condition, qu'en ses deux extrémités la courbe σ doit être perpendiculaire à la courbe donnée S.

Corollaire I. — Supposons un plan tangent à la surface se mouvant suivant la courbe à aire maximum; il engendrera une surface développable sur laquelle la courbe sera située, et cette courbe ayant une courbure tangentielle constante, il en résulte que si l'on développe cette surface sur un plan, la courbe se changera en cercle.

Corollaire II. — Si les deux surfaces sont tangentes suivant la ligne maximum par rapport à l'une des deux surfaces, cette ligne sera aussi la ligne à aire maximum sur l'autre surface.

140. Problème IX. — *Trouver sur la surface d'un cône circulaire droit la courbe dont la courbe tangentielle est constante.*

Soit $z = mt$ l'équation du cône circulaire droit, $m = \tan a$, a étant l'angle que la génératrice fait avec l'axe de révolution, l'équation (2) donne, P étant une constante,

$$\frac{t\,dt}{P\cos a} = d(t\cos\beta),$$

dont l'intégrale est, c^2 étant une constante arbitraire

$$\frac{t^2}{P\cos a} = 2t\cos\beta + c^2.$$

Si nous appelons τ le rayon vecteur mené du sommet du

cône à la circonférence de ce cercle tracé sur la surface supposée développée, l la distance du centre au sommet, A le rayon, et β l'angle du rayon du cercle et du rayon vecteur, l'équation de ce cercle est

$$\tau^2 - 2\tau A \cos\beta + A^2 - l^2 = 0.$$

Or, si l'on remarque que l'on a $t = \tau \cos a$, l'intégrale trouvée devient

$$\tau^2 - 2\tau P \cos\beta - \frac{c}{\cos a} = 0.$$

Cette équation devient identique avec la précédente, pourvu que l'on pose

$$A = P, \quad c^2 = (l^2 - A^2)\cos a;$$

ainsi, la courbe trouvée représente un cercle dont le plan est enroulé sur la surface conique.

L'équation différentielle entre t et θ est, d'après (135),

$$\cos a\, d\theta = \frac{(t^2 - c^2)\, dt}{t\sqrt{4k^2 t^2 \cos^2 a - (t^2 - c^2)^2}},$$

dans laquelle on a posé $k = P\cos a$.

L'intégrale est

$$t^2 - 2t\cos(\theta \sin a)\sqrt{(c^2 + A^2\cos a)\cos a} - c^2\cos a = 0.$$



LIVRE III.

DES COORDONNÉES GÉODÉSIQUES.

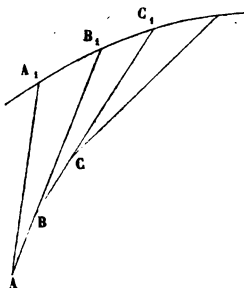
CHAPITRE PREMIER.

SYSTEME DIRECT DE COORDONNÉES GÉODÉSIQUES.

§ I. — FORMULES GÉNÉRALES.

141. PROBLÈME I. — *Étant donnée une courbe σ tracée sur une surface, on mène une série de rayons vecteurs géodésiques tangents à cette courbe, et dont les longueurs t, comptées à partir du point de contact, varient d'après une loi donnée, lieu des extrémités de ces rayons* (*fig.* 14).

Fig. 14.



Notations :

$d\sigma$ est l'élément de la courbe donnée σ;

$d\varepsilon$ son angle de contingence tangentielle à la surface;

Π le rayon de courbure tangentielle, fonction de ε;

ds, de, P sont les éléments analogues de la courbe décrite;
dp est l'arc géodésique compris entre deux arcs orthogonaux infiniment voisins;
dh est l'élément d'arc orthogonal;
H est le paramètre différentiel correspondant du premier ordre.

On prend pour paramètres variables t et ε déjà définis, de sorte que H est une fonction de t et de ε.

Lorsque les éléments dp, dh se rapporteront à un point quelconque non situé sur la courbe s, nous les accentuerons, si cela est nécessaire pour éviter confusion; β est l'angle que l'élément dp fait avec ds.

Tangente. — Nous avons $dp = dt + d\sigma$, ce qui revient à dire que p est le rayon vecteur géodésique normal à une développante, par rayons vecteurs géodésiques, de la courbe $d\sigma$. Nous avons les équations

$$(1)\quad dp = dt + \mathrm{H}\,d\varepsilon,\quad \cos\beta = \frac{dp}{ds},\quad \sin\beta = \frac{dh}{ds},\quad \cot\beta = \frac{dp}{\mathrm{H}\,d\varepsilon}.$$

Angles de contingence. — Si l'on applique le théorème de Gauss (n° 76) au triangle géodésique formé par deux rayons vecteurs t, $t + dt$ infiniment voisins, et par l'arc dh, projection de ds sur l'arc orthogonal, et qu'on représente par $d\omega$ l'angle de contingence tangentielle de l'arc orthogonal, l'on aura

$$\int_0^t \frac{\mathrm{H}\,dp\,d\varepsilon}{\varpi_1\varpi_2} = d\varepsilon - d\omega.$$

Or l'on a, d'après la formule (9^{IV}) n° 41, la relation

$$(2)\qquad \frac{d^2\mathrm{H}}{dp^2} + \frac{\mathrm{H}}{\varpi_1\varpi_0} = 0.$$

Substituant la valeur du second terme dans l'intégrale précédente, l'on aura, en intégrant entre les limites o et t,

$$-\int_0^t d\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp}\right)d\varepsilon = \left[\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp}\right)_0 - \frac{d\mathrm{H}}{dp}\right]d\varepsilon.$$

Mais, si l'on remarque, que pour $t = 0$, $\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp}\right)_0$ est l'unité, la

valeur de l'intégrale est $d\varepsilon\left(1-\frac{dH}{dp}\right)$; par suite, l'on obtient la relation suivante, l'une des plus importantes de la théorie :

$$(3)\qquad d\omega=\frac{dH}{dp}\,d\varepsilon.$$

A ces relations il faut ajouter celle qui provient du triangle infinitésimal dont les côtés sont ds, dp, dh, lequel donne

$$(4)\qquad d\omega=de-d\beta.$$

Différentielle de l'arc. — L'on a les formules

$$(5)\qquad ds^2=dh^2+dp^2,\quad ds^2=\left[H^2+\left(H+\frac{dt}{d\varepsilon}\right)^2\right]d\varepsilon^2.$$

142. *Rayon de courbure tangentielle de la ligne dh.* — Si l'on divise les deux termes de l'équation (3) par dh, et qu'on représente par $\frac{1}{R}$ la courbe tangentielle de l'arc dh, on a

$$(6)\qquad \frac{1}{R}=\frac{dH}{H\,dp},$$

dans laquelle il faut mettre la valeur de t, qui se rapporte au point que l'on considère.

Normale dans le plan tangent, tangente. — Si par le centre de courbure tangentielle de l'arc dh, lequel est situé dans le plan tangent, on mène une normale dans ce plan à ce rayon de courbure; elle intercepte sur la normale à la courbe ds située dans le plan tangent et sur la tangente deux segments N et T, qui sont la normale et la tangente de la courbe ds par rapport au centre de courbure, l'on a

$$(7)\qquad T=\frac{R}{\cos\beta}=\frac{R\,ds}{dp},\quad N=\frac{R}{\sin\beta}=\frac{R\,ds}{H\,d\varepsilon}.$$

Sous-normale, sous-tangente. — Les segments interceptés sur la perpendiculaire dans le plan tangent, menée au centre de courbure tangentielle de dh, par la normale et la tangente,

sont la sous-normale S_n et la sous-tangente S_t, et l'on a

$$(8)\quad S_t = R\tang\beta = \frac{H^2}{\frac{dH}{dp}\left(\Pi + \frac{dt}{d\varepsilon}\right)}, \quad S_n = R\cot\beta = \frac{\Pi + \frac{dt}{d\varepsilon}}{\frac{dH}{dp}}.$$

143. *Rayon de courbure tangentielle de ds.* — Si l'on divise l'équation (4) par ds, on obtient

$$(9)\quad \frac{\sin\beta}{R} = \frac{1}{P} - \frac{d\beta}{ds}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{N} = \frac{1}{P} - \frac{d\beta}{ds}.$$

L'élément $\frac{1}{N}$ représente aussi la composante tangentielle de la courbure inclinée de la courbe ds, supposée coupée par une série de courbes sous l'angle β. Cette courbure joue le rôle le plus important dans la théorie.

Si l'on différentie la troisième des équations (1), l'on obtient

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{\sin^3\beta}{H}\left(\frac{d^2p}{H\,d\varepsilon^2} - \frac{dp}{H^2 d\varepsilon}\frac{dH}{d\varepsilon}\right);$$

d'après cela, l'équation (9) devient

$$(9')\quad \frac{1}{P} = \frac{\sin\beta}{R} - \frac{\sin^3\beta}{H^2}\left(\frac{d^2p}{d\varepsilon^2} - \frac{dp}{d\varepsilon}\frac{dH}{H\,d\varepsilon}\right).$$

Si l'on élimine $\sin\beta$ au moyen de la deuxième des équations (1), l'on obtient

$$(10)\quad \frac{1}{P} = \frac{\frac{H^3}{R} + \frac{dp}{d\varepsilon}\left(\frac{H}{R}\frac{dp}{d\varepsilon} + \frac{dH}{d\varepsilon}\right) - H\frac{d^2p}{d\varepsilon^2}}{\left(H^2 + \frac{dp^2}{d\varepsilon^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbure $\frac{1}{P}$ tangentielle de la courbe ds prend deux nouvelles formes qu'il est bon de connaître.

1° Si l'on remarque que l'on a

$$d\cot\beta = -(1 + \cot^2\beta)\,d\beta,$$

la formule (9) s'écrit sous la forme

$$(11)\qquad \frac{1}{P} = \frac{\dfrac{1+\cot^2\beta}{R} - \dfrac{d\cot^2\beta}{2dp}}{(1+\cot^2\beta)^{\frac{3}{2}}},$$

et les équations (7) s'écrivent aussi sous la forme

$$(7')\qquad T = R\,\frac{\sqrt{1+\cot^2\beta}}{\cot\beta}, \quad N = R\sqrt{1+\cot^2\beta}.$$

2° Si l'on élimine de l'équation (9) R au moyen de l'équation (6), et ds au moyen de la deuxième des équations (1), l'on trouve

$$(12)\qquad \frac{1}{P} = \frac{\sin\beta\, dH}{H\,dp} + \frac{\cos\beta\, d\beta}{dp}.$$

Si le paramètre H ne dépend que de p, cette équation devient

$$(12')\qquad \frac{1}{P} = \frac{d(H\sin\beta)}{H\,dp},$$

que nous avons déjà trouvée, n° 134, sous une forme équivalente (2″).

Si dans l'équation (10) on élimine dp au moyen de la première des équations (1), on obtient

$$(10')\quad \frac{1}{P} = \frac{\dfrac{H^3}{R} + \left(\Pi + \dfrac{dt}{d\varepsilon}\right)\left[\dfrac{H}{R}\left(\Pi + \dfrac{dt}{d\varepsilon}\right) + \dfrac{dH}{d\varepsilon}\right] - H\left(\dfrac{d\Pi}{d\varepsilon} + \dfrac{d^2t}{d\varepsilon^2}\right)}{\left[H^2 + \left(\Pi + \dfrac{dt}{d\varepsilon}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Remarque. — Si la courbe σ se réduit à un point, il faut poser $d\sigma$ nul, et par conséquent Π égal à zéro. Alors cette dernière équation devient

$$(10'')\qquad \frac{1}{P} = \frac{\dfrac{H^3}{R} + \dfrac{dt}{d\varepsilon}\left(\dfrac{H}{R}\dfrac{dt}{d\varepsilon} + \dfrac{dH}{d\varepsilon}\right) - H\dfrac{d^2t}{d\varepsilon^2}}{\left(H^2 + \dfrac{dt^2}{d\varepsilon^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quadrature. — Soit du la différentielle de l'aire, on a

$$du = dp' \, dh' = \mathrm{H}(t', \varepsilon) dp' \, d\varepsilon;$$

si l'on y remplace t' par sa valeur $p' - \sigma$, il faudra intégrer : 1° entre les limites $t' = 0$ et $t' = t$, ou, ce qui est la même chose, entre $p' = \sigma$ et $p' = t + \sigma$; 2° entre deux valeurs de ε, ε_0 et ε, de sorte qu'on aura

$$(13) \qquad u = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon \int_0^t \mathrm{H}(p, \varepsilon) dp.$$

Comme la courbe $d\sigma$ est connue en fonction de ε, ainsi que t, toutes les formules que nous venons de calculer donnent les éléments de la courbe ds en fonction de ε : ce qui est la solution du problème général que nous nous étions proposé.

144. Première application : *Surfaces développables.* — Si l'on prend pour courbe directrice σ l'arête de rebroussement, les rayons vecteurs géodésiques sont les génératrices rectilignes de la surface. Sous ces conditions, le paramètre différentiel H est égal à t. Les formules (1) deviennent

$$(1) \qquad \begin{cases} dp = dt + \mathrm{H} d\varepsilon, & \cos\beta = \dfrac{dt + d\sigma}{ds}, \\ \sin\beta = \dfrac{t\, d\varepsilon}{d\sigma}, & \cot\beta = \dfrac{dt + d\sigma}{t\, d\varepsilon}. \end{cases}$$

La formule (2) est vérifiée; en effet, $\dfrac{1}{\varpi_1 \varpi_0}$, qui est la mesure de la courbure de la surface, est un élément nul dans le cas des surfaces développables. Il résulte de là que l'équation (2) se réduit à

$$\frac{\dfrac{d^2\mathrm{H}}{dt^2}}{\dfrac{dp^2}{dt^2}} = 0,$$

dont l'intégrale est $\mathrm{H} = \mathrm{A}t + \mathrm{B}$, A et B étant des constantes; mais, pour t nul, H est aussi nul, tandis que $\dfrac{d\mathrm{H}}{dt}$ est l'unité; donc $\mathrm{H} = t$.

Les équations (3) et (4) donnent

(3) $$d\omega = d\varepsilon,$$

(4) $$d\omega = de - d\beta.$$

On obtient de même

(6) $$R = t,$$

(7) $$T = \frac{t\,ds}{d(t+\sigma)}, \quad N = \frac{ds}{d\varepsilon},$$

(9) $$\frac{1}{P} = \frac{\sin\beta}{t} + \frac{d\beta}{ds},$$

(10) $$\frac{1}{P} = \frac{t^2 + \left(\Pi + \frac{dt}{d\varepsilon}\right)\left(\Pi + \frac{2\,dt}{d\varepsilon}\right) - t\left(\frac{d\Pi}{d\varepsilon} + \frac{d^2 t}{d\varepsilon^2}\right)}{\left[t^2 + \left(\Pi + \frac{dt}{d\varepsilon}\right)^2\right]^2},$$

(12) $$\frac{1}{P} = \frac{d(H\sin\beta)}{t\,dp},$$

(13) $$u = \frac{1}{2}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} t^2\,d\varepsilon.$$

Surfaces coniques. — On passe au cas de ces formules en faisant Π nul dans les formules que nous venons de trouver.

145. Deuxième application : *Sphère.* — Soit τ l'angle au centre qui correspond à l'arc t, a le rayon de la sphère; on a

$$dt = a\,d\tau, \quad dh = a\sin\tau.d\varepsilon, \quad H = a\sin\tau.$$

1° Si l'on suppose que la courbe $d\sigma$ directrice est quelconque, on obtient

(1) $$\cos\beta = \frac{a\,d\tau + d\sigma}{ds}, \quad \sin\beta = \frac{a\sin\tau\,d\varepsilon}{ds}, \quad \cot\beta = \frac{a\,d\tau + d\sigma}{\sin\tau\,d\varepsilon}.$$

Dans le cas de la sphère, la courbure $\frac{1}{\varpi_1\varpi_0}$ devient $\frac{1}{a^2}$, la formule (2) du n° 141 devient

(2) $$\frac{d^2H}{dt^2} + \frac{H}{a^2} = 0;$$

l'intégrale, en déterminant les constantes comme précédemment, est

$$H = a\sin\tau, \quad \text{d'où} \quad dh = a\sin\tau\, d\varepsilon.$$

On trouve de même les autres formules :

$$(3) \qquad d\omega = \cos\tau\, d\varepsilon,$$

$$(5) \qquad ds^2 = (a\,d\tau + H\,d\varepsilon)^2 + a^2\sin^2\tau\, d\varepsilon^2,$$

$$(6) \qquad R = a\,\text{tang}\,\tau,$$

$$(9) \qquad \frac{1}{P} = \frac{\sin\beta}{a\,\text{tang}\,\tau} + \frac{d\beta}{ds}.$$

2° Si l'on suppose que la courbe directrice $d\sigma$ est un petit cercle, soit γ l'angle sous lequel on voit du centre le rayon de ce petit cercle, et $d\lambda$ l'angle au centre de ce cercle, qui mesure l'élément $d\sigma$, on a les deux relations

$$d\sigma = a\sin\gamma\, d\lambda, \quad d\varepsilon = \cos\gamma\, d\lambda.$$

Donc l'équation naturelle du petit cercle est

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a\,\text{tang}\,\gamma.$$

D'après cela, on a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cos\beta = \dfrac{a(d\tau + \text{tang}\,\gamma\, d\varepsilon)}{ds}, \quad \sin\beta = \dfrac{a\sin\tau\, d\varepsilon}{ds}, \\ \cot\beta = \dfrac{d\tau + \text{tang}\,\gamma\, d\varepsilon}{\sin\tau\, d\varepsilon}, \end{array} \right.$$

$$(5) \qquad ds^2 = a^2(d\tau + \text{tang}\,\gamma\, d\varepsilon)^2 + a^2\sin^2\tau\, d\varepsilon^2.$$

3° Si la courbe $d\sigma$ se réduit à un point, on obtient

$$(1) \qquad \cos\beta = \frac{a\,d\tau}{ds}, \quad \sin\beta = \frac{a\sin\tau\, d\varepsilon}{ds}, \quad \cot\beta = \frac{d\tau}{\sin\tau\, d\varepsilon},$$

$$(5) \qquad ds^2 = a^2(\sin^2\tau\, d\varepsilon^2 + d\tau^2),$$

$$(7) \qquad T = \text{tang}\,\tau\, \frac{ds}{d\tau}, \quad N = \frac{ds}{\cos\tau\, d\varepsilon},$$

$$(10)\qquad \frac{a}{P} = \frac{\sin\tau\cos\tau + 2\cos\tau\dfrac{d\tau^2}{d\varepsilon^2} - \sin\tau\dfrac{d^2\tau}{d\varepsilon^2}}{\left(\sin^2\tau + \dfrac{d\tau^2}{d\varepsilon^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

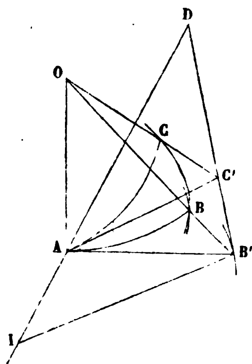
$$(12)\qquad \frac{a}{P} = \frac{d(\sin\beta\sin\tau)}{\sin\tau\, d\tau},$$

$$(13)\qquad u = a^2\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon \int_0^{\tau} \sin\tau\, d\tau,\qquad u = a^2\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}(1-\cos\tau)\,d\varepsilon.$$

146. *Comparaison de la courbe sphérique ds et de la courbe plane ds′ située dans un plan tangent à la sphère, la première étant la perspective sphérique de la seconde par rapport au centre de la sphère.*

Nous employons la notation précédente pour représenter les éléments de la ligne sphérique, et nous accentuerons les lettres pour représenter les éléments correspondants de la courbe plane. Cela posé (*fig.* 15), soit O le centre de la sphère,

Fig. 15.



ds' l'élément de la courbe plane passant par B′ dans le plan B′AC′, tangent au point A, origine des rayons vecteurs géodésiques, ds l'élément correspondant de la courbe sphérique passant par B. Si, par les extrémités de l'arc ds, l'on mène deux rayons OB, OB_1, ces deux rayons passeront par les extrémités B′, B'_1 de l'arc ds'; du point A abaissons une perpendi-

culaire AC′ à la tangente B′D à la courbe ds'. Soit p cette perpendiculaire, et π l'arc sphérique correspondant; la valeur de l'arc orthogonal compris entre les deux rayons menés aux points B′ et B'_1 sera $ds' \cos BOC$; mais les arcs ds, $ds' \cos BOC$ sont entre eux dans le rapport de OB à OB′, ou bien, de 1 à $\frac{1}{\cos\tau}$, on aura donc

$$ds = ds' \cos\tau \cos BOC.$$

Or le trièdre dont les arêtes sont OA, OB, OC, donne

$$\cos\tau = \cos\pi \cos BOC.$$

On aura donc

$$ds' = ds \frac{\cos\pi}{\cos^2\tau}.$$

1° *Direction des éléments.* — Les deux triangles ABC, AB′C′ donnent :

$$\text{le premier,} \quad \sin\beta = \frac{\sin\pi}{\sin\tau},$$

$$\text{le second,} \quad \sin\beta' = \frac{\tan\pi}{\tan\tau};$$

on a donc les relations

$$(1) \qquad \frac{\sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{\cos\tau}{\cos\pi}, \quad \frac{\cos\beta'}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos\pi}, \quad \frac{\tan\beta'}{\tan\beta} = \cos\tau.$$

2° *Tangentes.* — Soit T′ la tangente à la courbe plane, et T la tangente à la courbe sphérique, on a

$$(2) \qquad \frac{T'}{T} = \cos\pi.$$

3° *Normales* N *et* N′ :

$$(3) \qquad \frac{N'}{N} = \frac{\cos\pi}{\cos\tau}.$$

4° *Sous-tangentes* S_t, S'_t, *sous-normales* S_n, S'_n :

$$(4) \qquad S'_t = \sin\tau \tan\beta' = S_t = \tan\tau \tan\beta,$$

$$(4') \qquad S'_n = S_n \cos^2\tau.$$

5° *Rayons de courbure* P, P′. — Remarquons que, AC′ étant

perpendiculaire à la tangente à la courbe ds', l'arc de grand cercle π correspondant est perpendiculaire à l'arc de grand cercle tangent à la courbe ds; donc l'équation (12) du n° **145**, à cause de l'équation $\sin\beta = \frac{\sin\pi}{\sin\tau}$, devient

$$(5) \qquad \frac{a}{P} = -\frac{d\sin\pi}{d\cos\tau};$$

or dans la courbe plane, l'on a

$$\frac{a}{P'} = \frac{d\tan\pi}{a\tan\tau\,\frac{d\tau}{\cos^2\tau}}.$$

Si on effectue les calculs, et qu'on divise par la première, on obtient

$$(6) \qquad \frac{P}{P'} = \frac{\cos^3\tau}{\cos^3\pi} = \cos^3 B'OC',$$

cette relation donne une construction élégante de l'un des rayons de courbure tangentielle au moyen de l'autre.

6° *Angles de contingence tangentielle de, de'.* — Si dans l'équation (6) on remplace P et P' par $\frac{ds}{de}$, $\frac{ds'}{de'}$, et qu'on ait égard au rapport de ds à ds' donné au commencement du numéro on aura

$$(7) \qquad \frac{de'}{de} = \frac{\cos\tau}{\cos^2\pi}.$$

7° *Rapport des aires décrites par les rayons de courbure tangentielle.* — L'on a

$$du = \frac{1}{2}P^2 de, \quad du' = \frac{1}{2}P'^2 de';$$

en ayant égard aux valeurs précédentes, on obtient

$$\frac{du}{du'} = \frac{\cos^5\tau}{\cos^4\pi}.$$

147. Troisième application : *Surfaces de révolution.* — On

prend pour courbe directrice $d\sigma$, le point d'intersection de l'axe de révolution et de la surface. Soit l'équation du méridien $z = \psi(\iota)$, ι étant le rayon d'un parallèle, et θ l'angle que fait ce rayon avec un plan fixe passant par l'axe, le plan des zx, l'on a

$$dt = \sqrt{1 + \psi'^2}\, d\iota, \quad dh = \iota\, d\theta,$$

(1) $$\cos\beta = \frac{dt}{ds}, \quad \sin\beta = \frac{\iota\, d\theta}{ds}, \quad \cot\beta = \frac{dt}{\iota\, d\theta}.$$

La formule (2) du n° 145 se vérifie de la manière suivante : L'on a, dans le cas actuel,

$$\frac{1}{\varpi_1} = \frac{\psi''}{(1 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{\varpi_0} = \frac{\psi'}{\iota(1 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

de plus

$$\frac{d\,dh}{dt} = \frac{d(\iota\, d\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{(1 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on différentie une seconde fois par rapport à t, on obtient

$$\frac{d_t^2\, dh}{dt^2} = -\frac{\psi'\psi''\, d\theta}{(1 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

substituant cette expression ainsi que celle de $\frac{dh}{\varpi_0 \varpi_1}$ dans l'équation

$$\frac{d_t^2\, dh}{dt^2} + \frac{dh}{\varpi_0 \varpi_1} = 0,$$

cette équation se trouve vérifiée.

Angles de contingence tangentielle. — Soit γ_0 l'angle de l'arc méridien à l'origine avec la perpendiculaire à l'axe, l'on a la relation

$$d\varepsilon = \frac{d\theta}{\cos\gamma_0};$$

d'après cela,

$$\mathrm{H} = \iota \cos\gamma_0, \quad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = \frac{d\iota}{dt} \cos\gamma_0;$$

or, si l'on appelle γ l'angle que l'arc méridien fait avec le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, au point que l'on considère, $\frac{d\iota}{dt} = \frac{1}{\cos\gamma}$; on a donc l'équation

$$(3) \qquad d\omega = \frac{\cos\gamma_0}{\cos\gamma}\, d\varepsilon,$$

comme on peut le vérifier directement; on a aussi

$$(4) \qquad de = \frac{d\theta}{\cos\gamma} + d\beta.$$

Normale et tangente :

$$(7) \qquad \mathrm{T} = \frac{\mathrm{R}\,ds}{dt}, \qquad \mathrm{S}_t = \frac{\mathrm{R}\iota\,d\theta}{dt};$$

$$(8) \qquad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{R}}{\iota}\,\frac{ds}{d\theta}, \qquad \mathrm{S}_n = \frac{\mathrm{R}\,dt}{\iota\,d\theta}.$$

Rayons de courbure tangentielle :

$$(6) \qquad \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\cos\gamma}{\iota},$$

$$(9') \qquad \frac{1}{\mathrm{P}\sin\beta} = \frac{\cos\gamma}{\iota} - \frac{\sin^2\beta\, d\left(\frac{dt}{\iota\,d\theta}\right)}{\iota\,d\theta},$$

$$(10) \qquad \frac{1}{\mathrm{P}} = \frac{\cos\gamma\left(\iota^2 + 2\,\frac{dt^2}{d\theta^2}\right) - \iota\,\frac{d^2t}{d\theta^2}}{\left(\iota^2 + \frac{dt^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Différentielle de l'aire :

$$du = \iota\sqrt{1+\psi'^2}\,d\iota\,d\varepsilon, \qquad u = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon \int_{\iota_0}^{\iota} \iota\sqrt{1+\psi'^2}\,d\iota.$$

148. PROBLÈME II. — *Étant données les mêmes conditions que dans le problème n° 141, la longueur du rayon vecteur géodésique reste constante et égale à b, lieu des extrémités de ce rayon.*

Tangente. — La troisième des équations (1) donne

$$H = \Pi \operatorname{tang}\beta.$$

Cette formule montre que, si l'on mène, à partir du point situé sur la courbe *s*, dans la direction du premier élément géodésique du rayon *t*, une ligne droite égale à H et, à l'extrémité de cette ligne, une perpendiculaire égale à Π et située dans le plan tangent, et qu'on achève le triangle, l'hypoténuse de ce triangle est la normale à la courbe située dans le plan tangent.

Rectification :

$$ds^2 = (H^2 + \Pi^2)\,d\varepsilon^2.$$

Rayon de courbure tangentielle :

$$\frac{1}{P} = \frac{\sin\beta}{R} + \frac{\cos^3\beta}{\Pi}\,\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{H}{\Pi}\right).$$

La première de ces formules donne ds en fonction de ε, et la seconde fait connaître la courbure par une construction linéaire.

149. Applications : 1° *Sphère de rayon a; la courbe $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ est un petit cercle, le rayon vecteur géodésique $t = a\tau = b =$* const. — L'équation du petit cercle, ainsi que nous l'avons trouvé au n° **145**, est

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a \operatorname{tang}\gamma,$$

on trouve

$$ds^2 = a^2(\operatorname{tang}^2\gamma + \sin^2\tau)\,d\varepsilon^2 = a^2\operatorname{tang}^2\gamma\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\right)d\varepsilon^2;$$

or l'on a, d'après les formules (1) de la deuxième partie du n° **145**,

$$\cot\beta = \frac{\operatorname{tang}\gamma}{\sin\tau}, \quad d\varepsilon = \frac{d\omega}{\cos\tau}.$$

La première de ces deux formules montre que $\beta =$ const.; conséquemment la relation $de = d\omega + d\beta$ donne

$$d\omega = de = d\varepsilon\cos\tau.$$

Si l'on a égard à cette relation, on obtient l'équation naturelle de la courbe cherchée, en éliminant $d\varepsilon$ entre l'équation qui donne ds et celle que nous venons de trouver : cette équation est

$$P = \frac{ds}{de} = \frac{a \sin\gamma}{\sin\beta};$$

le second membre étant constant, elle représente un cercle.

150. 2° *Surfaces développables.* — Les formules (1) du n° 144 donnent

$$\cot\beta = \frac{\Pi}{b}, \quad ds^2 = (b^2 + \Pi^2)\,d\varepsilon^2.$$

La première de ces formules montre que, si l'on développe la surface sur un plan et qu'on joigne par une droite l'extrémité de b avec le centre de courbure de l'arête de rebroussement développée, cette droite est normale sur la courbe.

La formule (7) donne

$$\frac{1}{P} = \frac{\sin\beta}{b} - \frac{\sin^3\beta}{b^2}\left(\frac{d\Pi}{d\varepsilon}\right);$$

or $\frac{d\Pi}{d\varepsilon}$ est le rayon de courbure de la développée de l'arête de rebroussement après son développement sur un plan. Cette formule donne la construction du rayon de courbure tangentielle de la courbe.

La formule (9) donne l'expression de l'aire balayée par le rayon vecteur b : elle est

$$u = \frac{1}{2} b^2 \varepsilon,$$

c'est-à-dire égale au secteur circulaire dont le rayon est b et l'angle ε.

Supposons que l'arête σ, après son développement sur un plan, soit un cercle de rayon a, on a $\Pi = a$, et l'on tire de ce qui précède les conclusions suivantes :

1° L'angle β est constant, donc la courbe ds est la trajectoire coupant les tangentes sous angle constant.

2° L'angle $d\varepsilon = d\omega = de$, donc la courbe ds est une ligne

dont la courbure tangentielle est constante, puisque l'on a

$$\frac{ds}{de} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ainsi, si une surface développable a pour arête de rebroussement une ligne dont la première courbure est constante, une tangente de longueur constante décrit sur la surface une courbe dont la courbure tangentielle est aussi constante. C'est aussi ce que l'on aurait obtenu par la formule qui donne $\frac{1}{P}$, laquelle devient dans le cas actuel

$$\frac{1}{P} = \frac{\sin\beta}{b}.$$

Tous ces résultats sont susceptibles d'une très-grande généralisation.

§ II. — De la développante par rayons vecteurs géodésiques.

151. Problème III. — *Étant données les mêmes conditions que dans le problème du n° 141, trouver la développante de la courbe $d\sigma$.*

Dans ce problème, la loi des rayons vecteurs géodésiques t est connue, puisque l'on a

$$dt + d\sigma = 0,$$

d'où l'on tire, b étant une constante,

$$(1) \qquad t = b - \sigma = b - \int \Pi\, d\varepsilon.$$

Tangente. — Les équations (1) du n° 141 deviennent

$$(2) \qquad \cos\beta = 0, \quad dh = ds;$$

donc la courbe est perpendiculaire au rayon vecteur géodésique; on a ainsi une des orthogonales du système.

Rayon de courbure. — L'équation (9) du n° **143** donne, H' étant la dérivée de H par rapport à p,

$$(3)\qquad \frac{1}{P}=\frac{1}{R}=\frac{H'(t,\varepsilon)}{H(t,\varepsilon)}=\frac{H'\left(\varepsilon,\, b-\int \Pi\, d\varepsilon\right)}{H\left(\varepsilon,\, b-\int \Pi\, d\varepsilon\right)}.$$

Rectification. — L'on a

$$dh=ds=H(t,\varepsilon)\,d\varepsilon;$$

il faut remplacer, dans cette équation, t par la fonction $b-\sigma$, et intégrer entre deux valeurs de ε, ce qui donne

$$(4)\qquad s=\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} H(b-\sigma,\,\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Relations entre les rayons de courbure tangentielle d'une courbe et de sa développante. — L'équation (1) donne

$$\frac{dt}{d\varepsilon}=-\Pi;$$

or, d'après l'équation (3), P est une fonction déterminée de t et de ε, que nous représenterons par $f(t,\varepsilon)$:

$$(5)\qquad P=f(t,\varepsilon).$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à ε, et qu'on élimine $\frac{dt}{d\varepsilon}$ au moyen de la relation précédente, on aura

$$(6)\qquad \frac{dP}{d\varepsilon}=\frac{df}{d\varepsilon}-\frac{df}{dt}\Pi.$$

152. Applications : 1° *Contour décrit par un arc géodésique très-petit tournant autour d'une de ses extrémités.* — Proposons-nous de calculer la longueur et l'aire de ce contour. On a, d'après ce qui précède,

$$s=\int_0^{2\pi} dh,\qquad u=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t\,dh,$$

t étant constant et très-petit; or, si l'on développe dh suivant les puissances de t d'après la formule de Mac-Laurin, l'on

aura

$$dh=(dh)_0+t\left(\frac{d.dh}{dt}\right)_0+\frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2dh}{dt^2}\right)_0+\frac{t^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3dh}{dt^3}\right)_0+\ldots,$$

avec la condition

$$\frac{d^2dh}{dt^2}=-\frac{dh}{\varpi_1\varpi_0}=-\frac{dh}{K_n^2}\quad \text{n}^{\text{o}}\ 141\ (2);$$

or

$$(dh)_0=0,\quad \left(\frac{d.dh}{dt}\right)_0=d\varepsilon;$$

si l'on a recours à la relation précédente, on voit que

$$\left(\frac{d^2dh}{dt^2}\right)_0=-\left(\frac{dh}{K_n^2}\right)_0=0,\quad \left(\frac{d^3dh}{dt^3}\right)_0=-\frac{d\varepsilon}{(K_n^2)_0},$$

$$\left(\frac{d^4dh}{dt^4}\right)_0=0,\quad \left(\frac{d^5dh}{dt^5}\right)_0=\frac{d\varepsilon}{(K_n^4)_0}-3d\varepsilon\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{K_n^2}\right)\right]_0;$$

substituant ces valeurs, l'on a

$$dh=d\varepsilon\left\{t-\frac{1}{1.2.3}\frac{t^3}{(K_n^2)_0}+\frac{t^5}{1.2.3.4.5}\left[\frac{1}{K_n^4}-3\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{K_n^2}\right)\right]_0+\ldots\right\};$$

on aura donc, en négligeant les puissances de t supérieures à la cinquième ou à la sixième,

$$s=\int_0^{2\pi}dh=2\pi\left\{t-\frac{t^3}{1.2.3(K_n^2)_0}+\frac{t^5}{1.2.3.4.5}\times\left[\frac{1}{K_n^4}-3\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{K_n^2}\right)\right]_0+\ldots\right\},$$

$$u=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}t\,dh=\pi\left\{t^2-\frac{t^4}{1.2.3(K_n^2)_0}+\frac{t^6}{1.2.3.4.5}\times\left[\frac{1}{K_n^4}-3\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{K_n^2}\right)\right]_0+\ldots\right\}.$$

On tire de ces formules les conclusions suivantes : si deux surfaces ont en un point même courbure, la longueur du contour décrit par un arc géodésique très-petit tournant autour d'une de ses extrémités en ce point sur chacune de ces sur-

faces et l'aire de ce contour ne changeront pas d'une surface à l'autre, pourvu que l'arc géodésique très-petit reste le même.

153. 2° *Surface sphérique. — Développante géodésique d'un petit cercle.*

L'équation du petit cercle est (nº **145**)

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a \tang \gamma = m,$$

m étant une constante. Donc la loi des rayons vecteurs sera donnée par l'équation

$$t = b - m\varepsilon = a\tau.$$

Rectification. — La formule

$$dh = a \sin\tau\, d\varepsilon = ds$$

(nº **145**) donnera

$$s - s_0 = \frac{a^2}{m} \cos \frac{b - m\varepsilon}{a},$$

s_0 étant la constante d'intégration.

Angles de contingence :

$$d\varepsilon = \frac{d\omega}{\cos\tau}, \quad d\beta = 0, \quad \text{donc} \quad d\omega = de;$$

donc

$$de = d\varepsilon \cos\tau = d\varepsilon \cos \frac{b - m\varepsilon}{a},$$

et, par l'intégration,

$$e - e_0 = -\frac{a}{m} \sin \frac{b - m\varepsilon}{a};$$

on déduit de ces formules

$$(s - s_0)^2 + a^2(e - e_0)^2 = \frac{a^4}{m^2},$$

ce qui est l'équation naturelle de la courbe.

Rayon de courbure. — En divisant l'équation $de = d\varepsilon \cos\tau$

par l'équation $dh = a \sin\tau\, d\varepsilon$, on trouve

$$\frac{1}{P} = \frac{\cot\tau}{a} = \frac{\cot\dfrac{b - m\varepsilon}{a}}{a},$$

ce qui donne le rayon de courbure.

Ces deux dernières formules se déduisent aussi immédiatement de la relation (9) du n° **145**.

Quadrature. — L'on a

$$du = \int_0^t dt \int_0^\varepsilon dh = a^2 \int_0^t \int_0^\varepsilon \sin\tau\, d\tau\, d\varepsilon;$$

or, si l'on intègre par rapport à t depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t$, on obtient

$$u = -a^2 \int_0^\varepsilon (\cos\tau - 1)\, d\varepsilon = \frac{a^2}{\operatorname{tang}\gamma} \int_{\frac{b}{a}}^\tau (\cos\tau - 1)\, d\tau,$$

et, finalement,

$$u = \frac{a^2}{\operatorname{tang}\gamma}\left[\sin\tau - \sin\frac{b}{a} - \left(\tau - \frac{b}{a}\right)\right].$$

3° *Surface sphérique. — Développante géodésique d'une courbe quelconque* $\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} = \Pi$.

Rayons vecteurs géodésiques :

$$t = b - \int \Pi\, d\varepsilon = a\tau.$$

Rectification :

$$ds = a\, d\varepsilon \sin\frac{b - \int \Pi\, d\varepsilon}{a}.$$

Relations entre les rayons de courbure :

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = -a\frac{\Pi}{\cos^2\tau}, \quad \frac{dP}{ae} = -a\frac{\Pi}{\cos^3\tau}.$$

154. PROBLÈME IV. — *Trouver la développante oblique par rayons vecteurs géodésiques d'une ligne donnée.*

Nous appelons ainsi la courbe qui coupe sous un angle constant les rayons vecteurs géodésiques tangents à une ligne donnée $d\sigma$.

Loi des rayons vecteurs. — Elle est donnée par la troisième des équations (1) du n° 141, on a donc

$$\frac{dt}{d\varepsilon} - \mathrm{H}(t, \varepsilon)\cot\beta + \Pi = 0. \tag{1}$$

C'est l'équation différentielle du rayon vecteur géodésique t entre les deux variables t et ε. Si le paramètre différentiel H est proportionnel à t, l'intégrale ne dépendra que des quadratures.

Rectification. — La deuxième des équations (1) du n° 141 donne après l'intégration, s_0 étant une constante,

$$s + s_0 = \frac{t+\sigma}{\cos\beta}; \tag{2}$$

cette équation montre que la rectification de la courbe s ne dépend que de la rectification de la ligne géodésique t et de la courbe $d\sigma$.

Angles de contingence. — $d\beta$ étant nul, l'on a

$$d\omega = de = \mathrm{H}'(t, \varepsilon)\,d\varepsilon, \tag{3}$$

dans laquelle t doit être remplacée par sa valeur tirée de l'intégrale de l'équation (1).

Rayons de courbure tangentielle. — L'on a les relations

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{H}(t, \varepsilon)}{\mathrm{H}'(t, \varepsilon)}, \quad \mathrm{P} = \frac{\mathrm{R}}{\sin\beta} = \mathrm{N}. \tag{4}$$

Si l'on représente, comme précédemment, le rapport $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'}$ par $f(t, \varepsilon)$ et qu'on différentie l'équation (4) en ayant égard à l'équation (1), on obtient

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{P}}{d\varepsilon}\sin\beta - \frac{df}{dt}\mathrm{H}'\mathrm{P}\cos\beta = -\frac{df}{dt}\Pi + \frac{df}{d\varepsilon}, \\ &\frac{d\mathrm{P}}{de}\mathrm{H}'\sin\beta - \frac{df}{dt}\mathrm{H}'\mathrm{P}\cos\beta = -\frac{df}{dt}\Pi + \mathrm{H}'\frac{df}{de}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Ces deux relations qui rentrent l'une dans l'autre, lient entre eux les deux rayons de courbure tangentielle d'une courbe et de sa développante oblique, de telle sorte que la construction géométrique de l'un s'en déduit lorsque l'on connaît l'autre.

155. Application : *Surface sphérique. — Développante oblique de la courbe donnée par l'équation*

$$\frac{1}{\text{II}} = \frac{1}{m} + \frac{m}{4a^2n^2}(1 - \mathrm{E}^{n\varepsilon})^2.$$

Dans cette équation, on suppose m constante, a rayon de la sphère, $n = \cot\beta$, E base des logarithmes népériens. On obtient les résultats suivants.

Rayon vecteur géodésique. — Il est donné par l'équation

$$\frac{d\tau}{d\varepsilon} - n\sin\tau + \frac{\text{II}}{a} = 0.$$

Cette équation s'intègre par la variation des constantes arbitraires; et si l'on détermine la constante par la condition que lorsque τ est nul ε soit aussi nul, on trouve

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\tau = \frac{m}{2an}\left(1 - \mathrm{E}^{n\varepsilon}\right).$$

Rectification. — Si l'on veut que l'origine de l'arc corresponde à la valeur nulle de ε, on obtient

$$s = a\tau + m\varepsilon.$$

Rayon de courbure. — On obtient

$$\mathrm{P} = \frac{a\operatorname{tang}\tau}{\sin\beta}.$$

Angle de contingence. — Cet angle est donné par l'équation différentielle

$$de = \frac{4a^2n^2 - m^2(1 - \mathrm{E}^{n\varepsilon})^2}{4a^2n^2 + m^2(1 - \mathrm{E}^{n\varepsilon})^2}\,d\varepsilon,$$

qui ne dépend que des quadratures et qui se ramène à l'intégration des fonctions rationnelles, en posant $\mathrm{E}^{n\varepsilon} = x$.

Relation entre les rayons de courbure de la courbe et de sa développante. — Dans le cas actuel, la fonction f est $a\operatorname{tang}\tau$;

la deuxième des équations (5) donne

$$-\frac{dP}{de}\sin\beta + \frac{P}{\cos^2\tau}\cos\beta = \frac{\Pi}{\cos^3\tau}.$$

§ III. — Des lignes dont la courbure tangentielle jouit d'une propriété connue.

156. Problème V. — *Déterminer une ligne d'après une propriété de sa courbure tangentielle.*

L'expression que nous avons donnée de la courbure tangentielle dans le cas où les rayons vecteurs géodésiques p sont comptés à partir d'une développante de la courbe σ, n° **143**, formule (11), peut s'écrire sous la forme suivante, après avoir posé, pour abréger, $z = \cot^2\beta$,

$$(1) \qquad \frac{dz}{dp} - \frac{2}{R}(1 + z) + \frac{2}{P\sin^3\beta} = 0.$$

1° Posons $P\sin^3\beta = \mathfrak{G}$, et supposons que H ne dépende que de p ainsi que $\mathfrak{G}$, l'équation précédente pourra s'écrire sous la forme

$$d\left(\frac{z+1}{H^2}\right) = -2\frac{dp}{H^2\mathfrak{G}},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{z+1}{H^2} = -2\int\frac{dp}{H^2\mathfrak{G}}.$$

Cette équation fait connaître $\cot\beta$ en fonction de p; or l'on a

$$dp = H\cot\beta\, d\varepsilon.$$

Cette équation dans laquelle les variables seront séparées, lorsqu'on y aura remplacé $\cot\beta$ par sa valeur en fonction de p, donne

$$\varepsilon = \int\frac{dp}{H\cot\beta},$$

qui ne dépend que des quadratures, et qui est l'équation de la courbe cherchée.

2° Posons $P\sin\beta = \mathfrak{G}_1$ et admettons que H et $\mathfrak{G}_1$ ne dépen-

dent que de p. L'équation (1) pourra s'écrire sous la forme

$$(2)\qquad \frac{dz}{1+z} - \frac{2\,dH}{H} + \frac{2\,dp}{\mathfrak{G}_1} = 0;$$

son intégrale est

$$\log\frac{1+z}{H^2} + 2\int\frac{dp}{\mathfrak{G}_1} = 0.$$

3° La même équation (1) peut s'écrire ainsi sous la forme

$$(3)\qquad \frac{dz}{1+z} = 2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{P\sin\beta}\right)dp;$$

de là résulte que si l'expression $\frac{1}{R} - \frac{1}{P\sin\beta}$, que nous posons égale à $\frac{1}{\mathfrak{G}_2}$, est une fonction de p seule, l'on aura, quel que soit H, l'intégrale

$$\log(z+1) = 2\int\frac{dp}{\mathfrak{G}_2}.$$

Si H ne dépend que de p, on pourra pousser plus loin le calcul, en opérant comme on l'a fait au premier cas du présent numéro.

Si H dépend de p et de ε, l'équation précédente pourra toujours s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = H(p,\varepsilon)\sqrt{E^{2\int\frac{dp}{\mathfrak{G}_2}} - 1}.$$

Cette équation, dans laquelle E est le nombre dont le logarithme népérien est 1, est l'intégrale première de la courbe.

4° Si l'expression $\frac{1}{R} - \frac{1}{P\sin\beta}$ est égale à $\frac{1}{\mathfrak{G}_3\sin^m\beta}$, $\mathfrak{G}_3$ étant une fonction de p seule, et m une constante, l'équation (1) devient

$$(4)\qquad \frac{dz}{(1+z)^{1+\frac{m}{2}}} = \frac{2\,dp}{\mathfrak{G}_3},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{m(1+z)^{\frac{m}{2}}} + \int\frac{dp}{\mathfrak{G}_3} = 0.$$

Si H ne dépend que de p et qu'on pose, pour abréger, $-m\int \frac{dp}{\mathfrak{G}_3} = \psi_1(p)^{-\frac{m}{2}}$, on aura l'intégrale première de la courbe égale à

$$d\varepsilon = \frac{dp}{H\sqrt{\psi_1(p)-1}},$$

qui ne dépendra que des quadratures.

157. Applications : 1° *Étant donnée sur une surface la développante d'une ligne σ, on mène la série des rayons vecteurs géodésiques orthogonaux à cette développante, et l'on demande de déterminer une courbe telle, que, si l'on projette en un de ses points son rayon de courbure tangentielle sur la direction du rayon de courbure tangentielle de la ligne orthogonale, la moyenne harmonique de cette projection et de ce dernier rayon de courbure soit constante.*

L'on a la condition

$$\frac{1}{P\sin\beta} - \frac{1}{R} = \frac{1}{K},$$

K étant une constante; or, l'on a

$$\frac{1}{P\sin\beta} = \frac{1}{R} + \frac{d\beta}{dh},$$

de là résulte cette relation

$$\frac{d\beta}{dh} = \frac{1}{K};$$

d'une autre part, l'on a, d'après la troisième remarque du n° 156,

$$\log\frac{\sin\beta}{c} = \frac{p}{K}, \quad \sin\beta = cE^{\frac{p}{K}};$$

on aura donc pour équation différentielle de la courbe

$$d\varepsilon = \frac{dp}{H}\frac{cE^{\frac{p}{K}}}{\sqrt{1-c^2E^{\frac{2p}{K}}}}.$$

Si l'on détermine la constante c par la condition que lorsque $\beta = \beta_1$, $p = p_1$, l'on a

$$c = \sin\beta_1 \, \mathrm{E}^{-\frac{p_1}{\mathrm{K}}},$$

$$\sin\beta = \sin\beta_1 \, \mathrm{E}^{\frac{p - p_1}{\mathrm{K}}};$$

d'une autre part

$$dh = \sin\beta \, ds \quad \text{donne} \quad ds = \frac{\mathrm{K}\, d\beta}{\sin\beta},$$

dont l'intégrale est

$$s = \mathrm{K} \log \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta_1},$$

la constante étant déterminée par la condition que s est nul lorsque $\beta = \beta_1$. Si l'on élimine β entre ces deux équations, on obtient s en fonction de p :

$$\frac{s}{\mathrm{K}} = \log \frac{\sqrt{1 + \sin\beta_1 \, \mathrm{E}^{\frac{p-p_1}{\mathrm{K}}}} + \sqrt{1 - \sin\beta_1 \, \mathrm{E}^{\frac{p-p_1}{\mathrm{K}}}}}{\sqrt{1 + \sin\beta_1 \, \mathrm{E}^{\frac{p-p_1}{\mathrm{K}}}} - \sqrt{1 - \sin\beta_1 \, \mathrm{E}^{\frac{p-p_1}{\mathrm{K}}}}} - \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta_1.$$

Cette expression de s se rapporte à une valeur quelconque du paramètre différentiel H.

Si $\frac{1}{\mathrm{K}}$ est nul, on a

$$\frac{1}{\mathrm{P}} = \frac{\sin\beta}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{N}}:$$

la courbe est telle, que le rayon de courbure tangentielle est égal à la normale; on a $\frac{d\beta}{dh} = 0$, β est donc constant. La courbe cherchée est la trajectoire coupant sous angle constant les rayons vecteurs géodésiques t.

158. 2° *Les mêmes conditions étant données que dans le problème précédent, trouver la courbe dont la courbure géodésique est proportionnelle à la normale.*

On doit avoir la condition $\frac{1}{\rho} = \frac{\sin\beta}{KR}$, K étant une constante.

Il faut, dans l'intégrale qui se rapporte à la remarque 2° du n° 156, faire

$$\mathfrak{E}_1 = KR = K\frac{H\,dp}{dH};$$

on a donc, en appelant c^2 la constante de l'intégration,

$$\frac{1+z}{H^2} = c^2H^{-2K}, \quad \cot\beta = \sqrt{c^2H^{-2(K-1)}-1}.$$

Si l'on remplace $\cot\beta$ par sa valeur, on obtient

$$d\varepsilon = \frac{dp}{H\sqrt{c^2H^{2(1-K)}-1}},$$

qui est l'équation différentielle de la courbe.

Sphère. — Dans le cas de la sphère et dans le système de coordonnées employées au n° 145, l'équation devient

$$d\varepsilon = \frac{d\tau}{\sin\tau\sqrt{c^2a^{2(1-K)}\sin^{2(1-K)}\tau-1}},$$

$$d\varepsilon = \frac{d\tau}{\sin^2\tau\sqrt{c^2a^{2(1-K)}(1+\cot^2\tau)^K-(1+\cot^2\tau)}}.$$

1° Si $K=1$,

$$d\varepsilon = \frac{d\tau}{\sqrt{c^2-1}\,\sin\tau}, \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\tau = E^{(\varepsilon-\varepsilon_1)\sqrt{c^2-1}},$$

$\varepsilon_1\sqrt{c^2-1}$ étant la constante introduite par l'intégration : c'est la loxodromie (n° 90, 3°).

2° Si $K=2$,

$$d\varepsilon = \frac{\frac{a}{c}\,d\tau}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin^2\tau}},$$

qui dépend des fonctions elliptiques, à moins que la con-

stante c^2 ne soit égale à a : on obtient alors

$$d\varepsilon = -\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}, \quad (\varepsilon_1-\varepsilon) = \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right),$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right) = \mathrm{E}^{(\varepsilon_1-\varepsilon)}:$$

E est le nombre dont le logarithme népérien est 1.

159. Problème VI. — *Étant donnée l'équation naturelle d'une courbe* $\frac{ds}{de} = \mathrm{P}$, P *étant une fonction de e, trouver l'équation de cette courbe entre les deux variables t et* ε, *les rayons géodésiques t étant comptés sur la surface à partir d'un point fixe*, H *ne dépendant que de t.*

Remarquons que la deuxième et la quatrième des équations (1) du n° 141 peuvent s'écrire sous la forme

$$(1) \qquad \cos\beta = \frac{dt}{\mathrm{P}\,de}, \quad \cot\beta = \frac{\mathrm{H}'\,dt}{\mathrm{H}\,d\omega}.$$

Si l'on différentie la première de ces équations, et qu'on élimine β du résultat ainsi que de la deuxième des équations (1), on obtient

$$(2) \qquad -d\beta = \frac{d\left(\frac{dt}{\mathrm{P}\,de}\right)}{\sqrt{1-\frac{dt^2}{\mathrm{P}^2de^2}}}, \quad \frac{d\omega}{de} = \frac{\mathrm{H}'\mathrm{P}}{\mathrm{H}}\sqrt{1-\frac{dt^2}{\mathrm{P}^2de^2}}.$$

L'équation différentielle de la courbe s'obtiendra donc en substituant ces valeurs dans la relation $d\omega = de - d\beta$; cette équation différentielle est

$$(3) \qquad \frac{d}{de}\left(\frac{dt}{\mathrm{P}\,de}\right) - \frac{\mathrm{H}'\mathrm{P}}{\mathrm{H}}\left(1-\frac{dt^2}{\mathrm{P}^2de^2}\right) + \sqrt{1-\frac{dt^2}{\mathrm{P}^2de^2}} = 0.$$

C'est une chose remarquable que, dans le cas où la surface est telle, que H, paramètre différentiel du premier ordre, ne dé-

pende que du paramètre t, on parvienne à écrire l'équation différentielle d'une courbe quelconque tracée sur la surface, lorsque l'on connaît la définition naturelle de cette courbe.

L'intégrale de l'équation (3) fera connaître t en fonction de e; les équations (2) donneront β et ω en fonction de la même variable; donc l'équation $d\omega = H' d\varepsilon$ fera connaître ε en fonction de e. On aura donc les deux équations de la courbe, puisque l'on aura ε et t en fonction d'une seule variable e.

Remarque. — Il est aisé de voir que le même calcul aurait lieu si les rayons géodésiques p étaient comptés à partir d'une développante par rayons vecteurs géodésiques d'une courbe σ pourvu que H ne dépendît que de p.

160. Problème VII. — *Les mêmes conditions étant données que dans le problème précédent, $\frac{ds}{de}$ étant donné par le rapport d'une fonction de e à la dérivée* H', *trouver l'équation de la courbe entre les variables t et ε.*

Nous représentons par P_1 cette fonction et nous posons

$$(1) \qquad \frac{ds}{de} = \frac{P_1}{H'} = P.$$

La relation $e = \beta + \omega$ donne simultanément

$$\cos e = \cos\beta\cos\omega - \sin\beta\sin\omega,$$
$$\sin e = \sin\beta\cos\omega + \cos\beta\sin\omega.$$

Si l'on élimine $\sin\beta$ et $\cos\beta$ au moyen des équations (1) du n° **141**, on obtient

$$(2) \qquad \begin{cases} H'\cos e\, ds = d(H\cos\omega), \\ H'\sin e\, ds = d(H\sin\omega); \end{cases}$$

éliminant ds au moyen de la relation (1), on obtient

$$(3) \qquad H\cos\omega = \int P_1 \cos e\, de, \quad H\sin\omega = \int P_1 \sin e\, de,$$

desquelles on déduit

$$(3')\quad \begin{cases} H^2 = \left(\int P_1 \cos e\, de\right)^2 + \left(\int P_1 \sin e\, de\right)^2, \\ \tang\omega = \dfrac{\int P_1 \sin e\, de}{\int P_1 \cos e\, de}; \end{cases}$$

ces deux dernières équations donnent t et ω en fonction de e, ce qui est la solution du problème.

On fera sur cette solution la même remarque que dans le numéro précédent.

161. Application aux courbes sphériques : 1° *Étant donnée l'équation naturelle de la courbe* $\frac{ds}{de} = \psi'(e)$, *trouver l'équation de la courbe entre les variables* τ *et* ε, *rayon vecteur géodésique et azimut.*

Les équations (1) du n° 159 donnent dans le cas actuel

$$(1)\qquad \cos\beta = \frac{a\,d\tau}{\psi' de}, \quad \sin\beta = \frac{a \sin\tau\, d\omega}{\cos\tau\, \psi' de};$$

or

$$(2)\qquad de = d\beta + d\omega.$$

Il suffit donc d'éliminer β et ω entre ces trois équations

$$-d\beta = \frac{a\,d\left(\dfrac{d\tau}{\psi' de}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2 d\tau^2}{\psi'^2 de^2}}}, \quad d\omega = de\frac{\psi' \cos\tau}{a \sin\tau}\sqrt{1 - \frac{a^2}{\psi'^2}\frac{d\tau^2}{de^2}}.$$

Substituant, on obtient

$$(3)\quad a\frac{d}{de}\left(\frac{d\tau}{\psi' de}\right) - \cot\tau\,\frac{\psi'}{a}\left(1 - \frac{a^2}{\psi'^2}\frac{d\tau^2}{de^2}\right) + \sqrt{1 - \frac{a^2}{\psi'^2}\frac{d\tau^2}{de^2}} = 0,$$

qui est l'équation différentielle de la courbe entre les variables τ et e.

L'intégrale fera connaître τ en fonction de e, par suite, la

première des équations (1) donnera β en fonction de e, et la seconde, ω en fonction de la même variable; enfin l'équation $d\omega = d\varepsilon \cos\tau$ donnera ε en fonction de e, et comme l'on connaît τ en fonction de la même variable, les deux équations de la courbe seront

$$\tau = f_1(e), \quad \varepsilon = f_2(e).$$

L'équation (3) peut s'écrire

$$a\frac{d}{de}\left(\sin\tau\frac{d\tau}{\psi' de}\right) - \frac{\psi'\cos\tau}{a} + \sin\tau\sqrt{1 - \frac{a^2 d\tau^2}{\psi'^2 de^2}} = 0.$$

162. 2° *Étant donné* $\frac{ds}{de} = \frac{\psi'(e)}{\cos\tau}$, *trouver l'équation de la courbe entre* τ *et* ε.

L'on a

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} e &= \beta + \omega, \\ \cos e &= \cos\beta\cos\omega - \sin\beta\cos\omega, \\ \sin e &= \sin\beta\cos\omega + \cos\beta\sin\omega; \end{aligned}\right.$$

donc

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} ds\cos e\cos\tau &= a\,d(\sin\tau\cos\omega), \\ ds\sin e\cos\tau &= a\,d(\sin\tau\sin\omega); \end{aligned}\right.$$

donc en remplaçant ds par sa valeur, on trouve

$$a\sin\tau\cos\omega = \int \cos e\,\psi'(e)\,de,$$

$$a\sin\tau\sin\omega = \int \sin e\,\psi'(e)\,de;$$

élevant au carré, et ajoutant, on obtient

$$a^2\sin^2\tau = \left[\int \cos e\psi'(e)\,de\right]^2 + \left[\int \sin e\psi'(e)\,de\right]^2,$$

$$\tan g\omega = \frac{\int \sin e\psi'(e)\,de}{\int \cos e\psi'(e)\,de};$$

on a donc τ et ω en fonction de e; de plus

$$d\varepsilon = \frac{d\omega}{\cos\tau}.$$

On a donc aussi ε en fonction de e, ce qui est la solution du problème.

163. Problème VIII. — *Étant donné le rayon de courbure tangentielle par une équation différentielle linéaire de la forme*

$$(1) \qquad m\mathrm{H'P} + m_1 \frac{d}{de}(\mathrm{H'P}) + m_2 \frac{d^2}{de^2}(\mathrm{H'P}) + \ldots = 0,$$

dans laquelle m, m_1, m_2... sont des constantes, déterminer la courbe entre les variables p et ε, p étant un rayon vecteur géodésique perpendiculaire à la développante d'une courbe, et compté à partir de cette développante, et H *ne dépendant que de p.*

Posons, pour abréger, $\mathrm{H'P} = y$ et intégrons par parties successivement la première et la seconde des équations (2) du n° 160, qui ont encore lieu dans le cas actuel, on obtient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{H}\cos\omega &= \int y \cos e\, de,\\
\mathrm{H}\cos\omega &= y \sin e - \int \frac{dy}{de} \sin e\, de,\\
\mathrm{H}\cos\omega &= y \sin e + \frac{dy}{de}\cos e - \int \frac{d^2y}{de^2}\cos e\, de,\\
\mathrm{H}\cos\omega &= \sin e\left[y - \frac{d^2y}{de^2} + \frac{d^4y}{de^4} - \ldots + (\sqrt{-1})^{2n}\frac{d^{2n}y}{de^{2n}}\right]\\
&\quad + \cos e\left[\frac{dy}{de} - \frac{d^3y}{de^2} + \frac{d^5y}{de^5} - \ldots + t(-\sqrt{-1})^{2n}\frac{d^{2n+1}y}{de^{2n+1}}\right]\\
&\quad + \int \frac{d^{2n+2}y}{de^{2n+2}} \cos\left(\frac{2n+2}{2}\pi + e\right) de;
\end{aligned}\right.$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{H}\sin\omega = \int y \sin e\, de,\\
&\mathrm{H}\sin\omega = -y\cos e + \int \frac{dy}{de}\cos e\, de,\\
&\mathrm{H}\sin\omega = -y\cos e + \frac{dy}{de}\sin e - \int \frac{d^2y}{de^2}\sin e\, de,\\
&\mathrm{H}\sin\omega = \sin e\left[\frac{dy}{de} - \frac{d^3y}{de^3} + \ldots + (\sqrt{-1})^{2n}\frac{d^{2n+1}y}{de^{2n+1}}\right]\\
&\qquad + \cos e\left[-y + \frac{d^2y}{de^2} - \ldots + (-\sqrt{-1})^{2n}\frac{d^{2n}y}{de^{2n}}\right]\\
&\qquad + \int \frac{d^{2n+2}y}{de^{2n+2}}\sin\left(\frac{2n+2}{2}\pi + e\right) de.
\end{aligned}
\right.
$$

Cela posé, si l'on considère successivement les équations qui renferment $\cos e$ sous le signe intégral, et que l'on multiplie ces équations respectivement par m, m_1, $-m_2$, $-m_3$ et ainsi de suite, et qu'on ajoute, on aura une relation indépendante de toute ligne intégrale par suite de l'équation (1). Cette relation sera de la forme

$$(4)\qquad \mathrm{H}(\mathrm{M}\cos\omega + \mathrm{N}\sin\omega) = \mathrm{X}\cos e + \mathrm{Y}\sin e,$$

M, N étant des constantes, et X et Y des fonctions de y et de ses dérivées. En opérant de même sur les équations (2) et (3) qui renferment $\sin e$ sous le signe intégral, l'on aura, par suite de l'équation (1), la relation

$$(5)\qquad \mathrm{H}(\mathrm{M}\sin\omega - \mathrm{N}\cos\omega) = \mathrm{X}\sin e - \mathrm{Y}\cos e.$$

Remarquons que X et Y sont des fonctions de e données par l'intégrale de l'équation (1); si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \operatorname{tang}\omega_0,$$

ces équations deviennent

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{H}\cos(\omega - \omega_0) = \sqrt{\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2}(\mathrm{X}\cos e + \mathrm{Y}\sin e),\\
&\mathrm{H}\sin(\omega - \omega_0) = \sqrt{\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2}(\mathrm{X}\sin e - \mathrm{Y}\cos e).
\end{aligned}
\right.
$$

En élevant au carré, et ajoutant, on obtient

$$\mathrm{H}^2 = (\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2),$$

et, divisant l'un par l'autre,

$$\cot(\omega - \omega_1) = \frac{X\cos e + Y\sin e}{X\sin e - Y\sin e}.$$

Or H est une fonction connue de p, on a donc p en fonction de e; d'une autre part la seconde équation donne ω en fonction de ε, et par suite, à cause de la relation

$$d\varepsilon = H'_p d\omega,$$

ω est connu en fonction de ε, ce qui est la solution complète du problème.

164. Application : *Trouver la courbe telle, que*

$$(1) \qquad \frac{d}{de}(H'P) = mH'P.$$

On déduit des équations (4) et (5) du n° 163 les deux relations suivantes

$$(2) \qquad \begin{cases} mH\cos\omega - H\sin\omega = -H'P\cos e, \\ mH\sin\omega + H\cos\omega = H'P\sin e. \end{cases}$$

L'intégration de l'équation (1) donne

$$H'P = E^{m(e+e_0)},$$

E étant le nombre dont le logarithme népérien est 1, et me_0 la constante introduite par l'intégration.

H et, par suite, H' sont connus en fonction de p; de là résulte que l'on a, si l'on pose $m = \tang\omega_0$,

$$H\frac{\sin(\omega_0 - \omega)}{\cos\omega_0} = -E^{m(e+e_0)}\cos e,$$

$$H\frac{\cos(\omega_0 - \omega)}{\cos\omega_0} = E^{m(e+e_0)}\sin e;$$

on en déduit

$$H^2 = \cos^2\omega_0 E^{2m(e+e_0)},$$

$$\tang(\omega_0 - \omega) = -\cot e;$$

la première équation fait connaître p, et la seconde ω en fonction de e.

L'équation

$$d\varepsilon = \mathrm{H}' d\omega$$

fera connaître ε en fonction de e, ce qui est la solution complète du problème.

Il faut ici remarquer que la fonction H, qui change d'une surface à l'autre, imprime un caractère spécial à chaque courbe correspondante à chaque surface; mais ces courbes ont un caractère général qui existe pour toutes les surfaces.

165. Problème IX. — *Étant donné* $\dfrac{ds}{de} = f(p)$, *et* H *ne dépendant que de p, trouver les éléments de la courbe.*

Si l'on porte la valeur de P dans la formule (12′) du n° 143, et qu'on intègre, on aura

$$\sin\beta = \frac{1}{\mathrm{H}} \int \frac{\mathrm{H}\,dp}{f(p)}.$$

Si l'on porte cette valeur de $\sin\beta$ dans l'équation

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\mathrm{H}\,d\varepsilon}{dp},$$

et qu'on intègre, il vient

$$d\varepsilon = \frac{dp}{\mathrm{H}^2} \frac{\displaystyle\int \frac{\mathrm{H}\,dp}{f(p)}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{\mathrm{H}^2}\left(\displaystyle\int \frac{\mathrm{H}\,dp}{f(p)}\right)^2}},$$

dans laquelle les variables sont séparées. L'équation de la courbe sera donc, ε_0 étant une constante arbitraire,

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \int \frac{dp}{\mathrm{H}} \frac{\displaystyle\int \frac{\mathrm{H}\,dp}{f(p)}}{\sqrt{\mathrm{H}^2 - \left(\displaystyle\int \frac{\mathrm{H}\,dp}{f(p)}\right)^2}}.$$

Problème. — *Étant donné* $ds = f'(p)\,dp$, *trouver tous les éléments de la courbe.*

D'après l'équation (5) du n° **141**, on obtient

$$d\varepsilon = \frac{dp}{H}\sqrt{f'(p)^2 - 1},$$

qui est l'équation différentielle de la courbe.

Application aux courbes sphériques : 1° *Étant donné* $\frac{ds}{de} = f(\tau)$, *trouver les éléments de la courbe.*

La formule (12) du n° **145** donne

$$\int \frac{\sin\tau\, d\tau}{f(\tau)} = \sin\beta \sin\tau,$$

$$\sin\beta = \frac{1}{\sin\tau}\int \frac{\sin\tau\, d\tau}{f(\tau)};$$

or la quatrième des équations (1) du n° **141** devient

$$d\varepsilon = \frac{d\tau \sin\beta}{\sin\tau \cos\beta};$$

on aura donc, en éliminant β entre cette équation et la précédente,

$$d\varepsilon = \frac{\dfrac{d\tau}{\sin^2\tau}\displaystyle\int \frac{\sin\tau\, d\tau}{f(\tau)}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{\sin^2\tau}\left(\displaystyle\int \frac{\sin\tau\, d\tau}{f(\tau)}\right)^2}}.$$

2° *Étant donné* $ds = f'(t)\,dt$, *trouver les éléments de la courbe.*

En portant cette valeur dans l'équation (5) du même numéro, on trouve

$$d\tau\,[a^2 - f(a\tau)^2] = a^2 \sin^2\tau\, d\varepsilon^2,$$

$$d\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - f'(a\tau)^2}}{\sin\tau}\, d\tau,$$

qui est l'équation différentielle de la courbe.

3° *Étant donné* $ds = f'(\varepsilon)\,d\varepsilon$, *trouver tous les éléments de la courbe.*

On a, d'après la formule (5),

$$[f'(\varepsilon)^2 - a^2 \sin^2\tau]\, d\varepsilon^2 = a^2 d\tau,$$

qui est l'équation différentielle de la courbe.

4° *Étant donné* $ds = f'(\omega)\, d\omega$.

On a, d'après les équations (3) et (5),

$$f'^2(\omega)\, d\omega^2 = a^2(\operatorname{tang}^2\tau\, d\omega^2 + d\tau^2),$$

qui est une relation entre τ et ω, et ensuite l'équation (3) fait connaître une relation entre τ et ε.



CHAPITRE II.

SYSTÈMES DE COORDONNÉES RÉSULTANTS.

§ I. — Premier système. — Courbes rapportées a plusieurs rayons vecteurs géodésiques.

166. Problème X. — *Soient $p_1, p_2, \ldots, p_m$ les rayons vecteurs géodésiques menés d'un point* M *d'une courbe s normalement à n courbes données, ces courbes étant situées sur une surface; si ces rayons satisfont à la relation*

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_m) = a, \tag{1}$$

a étant une constante, le point M *décrit une courbe dont on demande les éléments.*

Tangente. — Si l'on différentie l'équation F par rapport à ds, et qu'on élimine les dp au moyen de la deuxieme des équations (1) du n° **141**, on aura

$$\sum \frac{dF}{dp} \cos\beta = 0; \tag{2}$$

de là résulte la construction suivante : *Si à partir d'un point pris sur la courbe et dans la direction du premier élément de chaque rayon vecteur géodésique, l'on prend des longueurs proportionnelles aux $\frac{dF}{dp}$ correspondants à ces rayons, le centre de gravité des extrémités sera sur la normale à la courbe située dans le plan tangent.*

Rayon de courbure. — Différentions l'équation précédente, et éliminons les dp comme précédemment, et les $d\beta$ au moyen des équations contenues dans le type (9) du n° **143**, on a

$$\sum \frac{d^2F}{dp^2} \cos^2\beta = \sum \frac{dF}{dp} \sin\beta \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right),$$

équation qui donne la construction, par la proportion harmonique, du rayon de courbure de la courbe *ds*.

Cette analyse comprend évidemment le cas où quelques-unes des courbes données se réduiraient à des points.

167. Applications. — 1° Soit

$$F = \sum A p = a,$$

$A_1 A_2 \ldots$ étant des constantes.

L'équation (2) relative à la tangente donne

$$\sum A \cos\beta = 0,$$

ce qui indique que la normale à la courbe dans le plan tangent passe par le centre de gravité des extrémités des lignes telles que A.

L'équation relative au rayon de courbure donne

$$\frac{1}{P}\sum A \sin\beta = \sum A \frac{\sin\beta}{N},$$

soit

$$MI_1 = A_1 \sin\beta_1, \quad MI_2 = A_2 \sin\beta_2, \ldots$$

et

$$MO = \sum A \sin\beta;$$

on a donc

$$\frac{MO}{P} = \frac{MI_1}{N_1} + \frac{MI_2}{N_2} + \frac{MI_3}{N_3} + \ldots,$$

équation de laquelle résulte la construction du rayon de courbure P.

2° Soit

$$F = p_1 p_2 p_3 \ldots p_m = a^m,$$

ou, ce qui est la même chose, en posant $\psi = \log F$,

$$\psi = \sum \log p = ma;$$

les équations précédentes deviennent

$$\sum \frac{\cos\beta}{p} = 0, \quad \sum \frac{\cos^2\beta}{p^2} = \sum \frac{\sin\beta}{p}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{P}\right).$$

La première équation indique que si l'on développe les rayons vecteurs géodésiques p dans le plan tangent à partir du point M, et dans la direction du premier élément de chaque rayon, et que par les extrémités on élève des perpendiculaires qui interceptent sur la tangente des segments tels que ME_1, ME_2,..., et sur la normale des segments tels que MI_1, MI_2,..., on obtient

$$\sum \frac{1}{ME} = 0, \quad \sum \frac{1}{\overline{ME}^2} = \sum \frac{1}{MI}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{P}\right).$$

168. *Conique géodésique.* — Si le nombre des courbes se réduit à deux dans la première application, et que les coefficients A soient égaux à l'unité, on a

$$p_1 + p_2 = a.$$

L'équation de la tangente est donnée par

$$\cos\beta_1 + \cos\beta_2 = 0, \quad \beta_2 + \beta_1 = \pi;$$

la bissectrice des deux rayons est la normale dans le plan tangent.

L'équation du rayon de courbure devient

$$\frac{2}{P\sin\beta} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

et l'on voit que si l'on appelle $\mathfrak{N}$ la longueur de la normale située dans le plan tangent, et terminée à la base du triangle dont les côtés sont R_1, R_2, on obtient

$$\mathfrak{N} = P\cos^2\beta,$$

ce qui donne, pour la conique géodésique, un théorème analogue à celui de Newton, et duquel résulte une construction élégante du rayon de courbure P.

169. *Coniques géodésiques homofocales.* — Supposons que les deux courbes sont deux points invariables sur la surface; les deux coniques pour lesquelles on aura

$$p_1 \pm p_2 = 2a,$$

a pouvant prendre toutes les valeurs possibles, sont dites *homofocales*. Considérons les deux coniques homofocales

$$p_1 + p_2 = 2k, \quad p_1 - p_2 = 2k'.$$

Soit un point M pris sur l'ellipse géodésique; du point F, avec un rayon géodésique égal à t, décrivons une trajectoire orthogonale des arcs géodésiques menés de ce point, et du point F', avec un rayon géodésique égal à t, décrivons une trajectoire orthogonale des arcs géodésiques menés du point F'; si l'on appelle A et B les points où l'arc géodésique FM coupe la première trajectoire orthogonale, et A', B' les points où l'arc géodésique F'M coupe la seconde, en supposant que la première trajectoire contienne la seconde, l'on a

$$\text{MA} = t - \text{FM}, \quad \text{MB} = t + \text{FM},$$
$$\text{MA}' = \text{F}'\text{M} - t', \quad \text{MB}' = \text{F}'\text{M} + t';$$

or, suivant que l'on aura l'un des quatre cas,

$$\text{MA} = \text{MA}', \quad \text{MA} = \text{MB}', \quad \text{MB} = \text{MA}', \quad \text{MB} = \text{MB}',$$

l'on obtiendra l'une des quatre relations correspondantes

$$t + t' = \text{FM} + \text{F}'\text{M}, \quad t - t' = \text{F}'\text{M} + \text{FM},$$
$$t + t' = \text{F}'\text{M} - \text{FM}, \quad t - t' = \text{F}'\text{M} - \text{FM};$$

de là on conclut :

1° Que si des trajectoires orthogonales sont décrites des points F et F' comme centres avec des rayons satisfaisant à l'une des deux conditions $t + t' = 2k$, $t - t' = \pm 2k$, l'on aura l'ellipse géodésique $2k$, qui sera le lieu des centres des trajectoires orthogonales tangentes à ces deux trajectoires. On voit qu'il y a une infinité de couples de trajectoires orthogonales décrites des points F et F' comme centres, telles que l'ellipse géodésique $2k$ soit le lieu des centres des trajectoires orthogonales tangentes à un couple. Quand on fait varier t depuis zéro jusqu'à $2k$, t' varie depuis $2k$ jusqu'à zéro, et quand on fait varier t depuis $2k$ jusqu'à l'infini, t varie depuis zéro jusqu'à l'infini, et il en est de même lorsqu'on fait varier t' depuis $2k$ jusqu'à l'infini.

2° Que si deux trajectoires orthogonales sont décrites des

points F et F′ comme centres avec des rayons satisfaisant à l'une des conditions $t + t' = 2k'$, $t - t' = \pm 2k'$, le lieu des centres des trajectoires orthogonales tangentes à ces deux trajectoires est l'hyperbole $2k'$. Il y a une infinité de couples de trajectoires orthogonales décrites des points F et F′, telles que le lieu des centres des trajectoires orthogonales qui sont tangentes à un couple donne l'hyperbole $2k'$. Si t varie depuis zéro jusqu'à $2k'$, t' varie depuis $2k'$ jusqu'à zéro; si t varie depuis $2k'$ jusqu'à l'infini, t' varie depuis zéro jusqu'à l'infini, ou bien inversement si t' varie depuis $2k'$ jusqu'à l'infini, t varie depuis zéro jusqu'à l'infini.

On conclut aussi de ce que nous venons de dire, que si deux trajectoires orthogonales sont décrites des points F et F′ comme centres avec des rayons donnés, il y a toujours deux coniques géodésiques qui sont les lieux des centres des trajectoires tangentes aux deux trajectoires données; si ces deux trajectoires ne se coupent pas, ces deux coniques sont deux ellipses ou deux hyperboles; si ces deux trajectoires se coupent, ces deux coniques sont une ellipse et une hyperbole. Dans les deux cas, l'une des coniques se rapporte à deux contacts de même nom, et l'autre à des contacts de noms différents.

170. *Généralisation.* — Supposons que le système des coordonnées soit l'ensemble de deux séries de rayons géodésiques menés normalement à deux courbes directrices C et C′ tracées sur la surface. Si n et n' sont deux rayons géodésiques coordonnés du point M, les équations des deux lignes bissectrices de l'angle du système, tracées sur la surface, seront comme précédemment

$$n - n' = 2k', \quad n + n' = 2k;$$

si l'on considère les courbes D et D′, développées par arcs normaux géodésiques des deux courbes données C et C′, l'on voit que l'une des deux bissectrices sera engendrée mécaniquement par un stylet qui, en se mouvant, tiendrait tendu et appliqué sur la surface un fil dont les deux extrémités seraient fixées sur les deux courbes D et D′, sur lesquelles le fil s'envelopperait ou se développerait. Toutes les conclusions du

numéro précédent auraient leurs analogues dans la question actuelle; seulement, les trajectoires orthogonales des rayons géodésiques, tels que n et n', seraient des développantes par rayons géodésiques des courbes D et D', et les courbes

$$n + n' = 2k, \quad n - n' = 2k$$

seraient les lieux des centres des trajectoires orthogonales enveloppant un couple de deux développantes, ces diverses trajectoires coupant orthogonalement tous les rayons géodésiques menés de ces centres.

171. *Des lignes de courbure ellipsoïdales considérées comme des coniques géodésiques.*

Théorème. — *Les lignes de courbure ellipsoïdales sont des coniques géodésiques par rapport à deux ombilics et, plus généralement, par rapport à deux arcs d'une même ligne de courbure.*

Prenons pour lignes coordonnées les deux séries de lignes géodésiques que l'on peut mener des différents points de l'ellipsoïde tangentiellement à une même ligne de courbure. Les deux courbes bissectrices des angles de ce système de coordonnées sont les lignes de courbure de la série μ et de la série ν, d'après ce qui a été dit; donc tous les théorèmes démontrés dans les deux numéros précédents s'appliquent aux deux lignes de courbure μ et ν, relativement aux deux arcs géodésiques menés d'un de leurs points normalement aux deux développantes géodésiques d'une même ligne de courbure, inversement placées.

Étudions en particulier les propriétés des lignes de courbure ellipsoïdales par rapport aux arcs géodésiques menés des ombilics.

Soient les quatre ombilics F, F'; F_1, F'_1, les deux premiers étant symétriques des deux autres par rapport au grand axe de l'ellipsoïde, les arcs géodésiques FF', $F_1F'_1$ sont les lignes de courbure limites de la série μ, et les arcs géodésiques FF_1, $F'F'_1$ les lignes de courbure limites de la série ν; soient J et J_1 les milieux des arcs géodésiques FF_1, $F_1F'_1$, et I, I' les milieux des arcs FF_1, $F'F'_1$; si l'on considère un point M situé sur une

ligne de courbure μ, l'on aura pour tous les points de cette ligne :

1° La somme des arcs géodésiques menés du point M aux deux ombilics F, F' symétriques par rapport à l'un des axes, égale à une constante :

$$F'M + FM = 2JA;$$

2° La somme des arcs géodésiques menés du point M aux deux ombilics opposés F_1, F'_1 égale à une constante :

$$F_1M + F'M = 2J_1A;$$

3° La différence de deux arcs géodésiques menés du point M aux deux ombilics symétriques par rapport à l'autre axe, égale à une constante, ce qui donne

$$F_1M - FM = 2IA, \quad F'_1M - F'M = 2I'A';$$

4° La somme de deux arcs géodésiques menés du point M à deux ombilics symétriques par rapport au centre de l'ellipsoïde, égale à une constante, ce qui donne

$$FM + F'_1M = JI' + I'J_1,$$

et par conséquent le plus court chemin d'un ombilic à une autre symétrique par rapport au centre, a une direction quelconque;

5° L'arc géodésique mené d'un point M à l'un des deux ombilics F ou F' est la somme ou la différence des deux demi-axes géodésiques de la ligne de courbure μ et de la ligne de courbure ν, ce qui donne

$$MF' = JB + JA, \quad MF = JA - JB.$$

Les mêmes propriétés ont lieu pour une ligne de courbure de la série ν.

Il résulte de ce qui précède, ce théorème dû à M. M. Roberts, et qui est l'un des plus élégants de la Géométrie des surfaces du second ordre :

Si deux ombilics sont intérieurs ou extérieurs à une ligne de courbure, la somme des rayons géodésiques menés d'un des points de cette ligne à ces deux ombilics est constante, et si les deux ombilics sont, l'un intérieur, l'autre extérieur, la différence des rayons géodésiqnes est constante.

On déduit avec la même facilité de l'analyse précédente ce théorème dû à M. Chasles:

Si un fil de longueur constante est fixé par ses deux extrémités en deux points d'une ligne de courbure, le stylet qui, en se mouvant, maintient ce fil tendu et appliqué sur la surface de l'ellipsoïde et l'oblige à s'envelopper sur la courbe et à s'y développer, décrit une ligne de courbure.

172. Problème XI. — *Trouver, sur une surface, la courbe telle, qu'un point* M *situé sur la circonférence se meuve d'un mouvement uniformément accéléré pendant qu'il est soumis à l'action de plusieurs forces fonctions de rayons vecteurs géodésiques $p_1, p_2, \ldots, p_m$ normaux à des courbes, ces forces agissant suivant le premier élément de ces rayons à partir du point* M.

Soit

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_m) \tag{1}$$

la fonction des forces, c'est-à-dire une fonction telle, que la force qui agit suivant l'élément de p_1 soit la dérivée par rapport à p_1 de F, et ainsi de suite. L'équation de condition, a étant une constante, est

$$\sum \frac{dF}{dp} \cos\beta = ma. \tag{2}$$

Si l'on remplace les $\cos\beta$ par leurs valeurs tirées de la deuxième des équations (1) du n° 141, on a, après intégration,

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_m) = ma(s - s_0), \tag{4}$$

as_0 étant la constante de l'intégration.

Si l'on différentie l'équation (2) et qu'on élimine les dp et les $d\beta$, comme on l'a fait au n° 166, on trouve l'équation (3) de ce numéro :

$$\sum \frac{d^2F}{dp^2} \cos^2\beta = \sum \frac{dF}{dp} \sin\beta \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right). \tag{3}$$

La construction de la tangente à la courbe se déduit de l'équation (2). Du point M, et dans la direction du premier élément géodésique de chaque rayon p, prenez des longueurs

proportionnelles à $\frac{dF}{dp}$, et ensuite le centre de gravité des extrémités; du point M décrivez une circonférence de cercle avec un rayon égal à A, du centre de gravité menez une tangente à ce cercle, et du point M, un rayon au point de contact. Ce rayon est la tangente à la courbe. Il semblerait qu'il y a deux solutions, mais le signe de a détermine celle des deux qu'il faut choisir.

L'équation (3) donne, comme précédemment, le rayon de courbure géodésique.

L'équation (4) montre que la rectification de la courbe ne dépend que de la rectification d'une ligne géodésique p.

173. *Remarques.* — 1° L'équation (2) est une des données de la question; or, la fonction F des forces existe lorsque chaque dérivée $\frac{dF}{dp}$ ne dépend que de p correspondant. Ainsi la solution du problème précédent se rapporte au cas où le point M est soumis, suivant le premier élément de chaque rayon vecteur géodésique, à l'action d'une force fonction de la longueur de ce rayon.

2° La fonction F des forces existe encore lorsque les forces $\frac{dF}{dp}$ sont constantes. Ce cas se présente lorsque, les rayons géodésiques se réduisant à deux, la courbe ds réfléchit un rayon vecteur géodésique, de telle sorte que l'angle d'incidence égale l'angle de réflexion, ou bien lorsqu'elle le réfracte de telle sorte que le sinus de l'angle de réfraction soit dans un rapport constant avec le sinus de l'angle d'incidence. Il en résulte des courbes qu'on peut appeler *caustiques géodésiques* par réflexion et par réfraction.

3° Les trajectoires qui se rapportent au premier cas, et les courbes réfléchissantes ou réfringentes qui se rapportent au second, jouissent de cette propriété que la normale dans le plan tangent et leur rayon de courbure géodésique peuvent se construire par la règle seulement, et que leur rectification ne dépend que de la rectification de la ligne géodésique et des développées géodésiques des courbes données.

4° Si les courbes se réduisent à des points, la trajectoire ou

la caustique seront telles, que leurs rectifications ne dépendront que de la rectification de la ligne géodésique.

5° La rectification d'une conique géodésique ne dépend que de la rectification de la ligne géodésique.

Généralisation. — Les mêmes conditions étant données que dans le n° 172, problème précédent, on cherche la courbe telle, que le point soumis à l'action des forces se meuve d'un mouvement qui ne dépend que de l'arc de la courbe décrite.

Cette condition entraîne l'équation, dt étant l'élément du temps,

$$\frac{ds}{dt} = \psi'(s);$$

de là résulte que l'on a

$$(2) \qquad \sum \frac{dF}{dp} \cos\beta = \psi'(s).$$

L'équation (4) devient

$$(4) \qquad F(p_1 p_2 \ldots p_m) = \psi(s);$$

on a aussi

$$(3) \qquad \sum \frac{d^2F}{dp^2} \cos^2\beta = \sum \frac{dF}{dp} \sin\beta \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right) + \psi''(s).$$

Il est facile de tirer de ces équations des conclusions analogues aux précédentes.

§ II. — Deuxième système. — Des courbes conjuguées suivant leurs rayons vecteurs géodésiques.

174. Des courbes $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m$ situées sur une surface quelconque, sont dites *conjugées suivant leurs rayons vecteurs géodésiques,* lorsqu'une même ligne géodésique variable de position, mais constamment normale à une ligne développante d'une courbe $d\sigma$ donnée sur la surface, est coupée par les premières courbes de telle sorte que les segments géodésiques $p_1, p_2, \ldots, p_m$, comptés à partir de la développante dn jusqu'aux points d'intersection, satisfassent à une relation entre ces rayons telle que

$$(1) \qquad F(p_1, p_2, \ldots, p_m) = \text{const.} = k.$$

Les points déterminés sur cette ligne géodésique par les différentes courbes sont dits *conjugués.*

PROBLÈME XII. — *Connaissant la loi d'après laquelle les m courbes sont conjuguées suivant leurs rayons vecteurs géodésiques, trouver la loi d'après laquelle : 1° les tangentes à ces courbes, 2° les rayons de courbure tangentielle menés aux extrémités des rayons vecteurs, sont conjugués.*

Si nous conservons pour chacune de ces courbes les notations employées pour la courbe ds au n° **141**, et que nous différentions l'équation (1), nous aurons

$$\sum \frac{dF}{dp} dp = 0;$$

or, si nous éliminons les dp au moyen des équations analogues à la quatrième des équations (1) du n° **141**, nous obtenons

$$\sum H \frac{dF}{dp} \cot\beta = 0, \tag{2}$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les indices depuis 1 jusqu'à m.

L'équation (2) fait connaître la loi d'après laquelle sont conjugués les angles β que la ligne géodésique fait avec les m courbes.

Remarquons que l'on a, n° **142**, $R = \frac{H}{H'}$, H' étant la dérivée de H par rapport à un rayon vecteur p; donc l'équation précédente s'écrit

$$\sum H' \frac{dF}{dp} R \cot\beta = 0.$$

Si l'on introduit les normales N (7) du n° **142**, l'on a

$$\sum H' \frac{dF}{dp} N \cos\beta = 0. \tag{2'}$$

Cette équation fait connaître la loi d'après laquelle sont conjuguées les normales aux m courbes, de telle sorte que si toutes les normales moins une sont connues, la dernière sera aussi connue. Cette loi se traduit par la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Si m courbes tracées sur une surface sont conjuguées suivant leurs rayons vecteurs d'après la loi* (1), *et qu'à partir de chacune de ces courbes on prenne dans le plan tangent, et dans la direction du premier élément du rayon vecteur géodésique, des longueurs proportionnelles au produit des dérivées* $\frac{dH}{dp}$, $\frac{dF}{dp}$, ..., *la somme algébrique des triangles rectangles construits sur ces longueurs et les normales correspondantes est toujours nulle.*

175. *Loi des rayons de courbure tangentielle.* — Remarquons que l'on a, $d\varepsilon$ étant l'angle de contingence de dn,

$$(3) \qquad d\beta = \left(\frac{H}{P\sin\beta} - \frac{H}{R}\right) d\varepsilon.$$

Cela posé, si l'on différentie l'équation (2) et qu'on élimine les dp, comme précédemment, et les $d\beta$ au moyen des équations contenues dans le type (3), l'on aura

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{1}{P} \frac{H^2}{\sin^3\beta} \frac{dF}{dp} = \sum \frac{dF}{dp} \frac{H^2}{R\sin^2\beta} \\ + \sum H \cot^2\beta \frac{d}{dp}\left(H \frac{dF}{dp}\right) + \sum \cot\beta \frac{dF}{dp} \frac{dH}{d\varepsilon}, \end{aligned} \right.$$

que l'on peut aussi écrire sous l'une des deux formes

$$(4') \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{1}{P} \frac{H^2}{\sin^3\beta} \frac{dF}{dp} = \sum H \frac{dH}{dp} \frac{dF}{dp} \\ + \sum \cot^2\beta \frac{d}{dp}\left(H^2 \frac{dF}{dp}\right) + \sum \cot\beta \frac{dF}{dp} \frac{dH}{d\varepsilon}, \end{aligned} \right.$$

$$(4'') \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{1}{P} \frac{H^2}{\sin^3\beta} \frac{dF}{dp} = \sum \frac{1}{\sin^2\beta} \frac{d}{dp}\left(H^2 \frac{dF}{dp}\right) \\ - \sum H \frac{d}{dp}\left(H \frac{dF}{dp}\right) + \sum \cot\beta \frac{dF}{dp} \frac{dH}{d\varepsilon}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules font connaître la loi d'après laquelle sont conjugués les rayons de courbure tangentielle des m courbes.

Remarquons :

1° La généralité de ces formules : bien qu'elles se rapportent à une surface quelconque, elles sont presque aussi simples que celles qui se rapportent à un plan;

2° Si le paramètre différentiel H ne dépend que de p, les termes renfermés dans la dernière somme disparaissent;

3° Si la surface est une sphère et dn un point, H est égal à $\sin\tau$, ($p = a\tau$), et l'on a, d'après la formule ($4''$),

$$\sum \frac{\sin^2\tau}{P\sin^2\beta}\frac{dF}{d\tau} = \frac{1}{a}\sum\frac{1}{\sin^2\beta}\frac{d}{d\tau}\left(\sin^2\tau\frac{dF}{d\tau}\right) - \frac{1}{a}\sum \sin\tau\frac{d}{d\tau}\left(\sin\tau\frac{dF}{d\tau}\right);$$

4° Si enfin il s'agissait d'un plan dans lequel la courbe dn se réduirait à un point, H serait égal à p, et l'on aurait

$$\sum\frac{p^2\frac{dF}{dp}}{P\sin^2\beta} = \sum\frac{1}{\sin^2\beta}\frac{d}{dp}\left(p^2\frac{dF}{dp}\right) - \sum p\frac{d}{dp}\left(p\frac{dF}{dp}\right).$$

Transformation géométrique des formules précédentes. — Considérons une des m courbes ds (*fig.* 16). Soit ν le point où

Fig. 16.

la perpendiculaire à l'extrémité de la normale N rencontre la droite menée dans le plan tangent suivant la direction du premier élément du rayon vecteur géodésique au point M de cette courbe; soit I la projection sur $M\nu$ du centre de courbure tangentielle C, et $M\iota$ une troisième proportionnelle à MN et

MI; soit O la projection de N sur $M\iota$, l'on a

$$M\iota = \frac{N^2}{P\sin\beta}, \quad M\nu = \frac{R}{\sin^2\beta}, \quad \nu O = R\cot^2\beta;$$

la première des formules (4) devient

$$(4''')\quad \left\{\begin{aligned} &\sum H'^2 \frac{dF}{dp} M\iota - \sum\left(\frac{dF}{dp} H'^2 M\nu\right) \\ &\quad = \sum H'\nu O \frac{d}{dp}\left(H\frac{dF}{dp}\right) + \sum \cot\beta \frac{dF}{dp}\frac{dH}{d\varepsilon};\end{aligned}\right.$$

les termes correspondants des deux premières sommes pouvant se réduire, l'on a

$$(4^{\text{iv}})\quad \sum H'^2 \frac{dF}{dp}\overline{\nu\iota} = \sum H'\overline{\nu O}\frac{d}{dp}\left(H\frac{dF}{dp}\right) + \sum \cot\beta \frac{dF}{dp}\frac{dH}{d\varepsilon}.$$

L'une ou l'autre de ces formules permettra de construire géométriquement le segment $M\iota$ de la $m^{\text{ième}}$ courbe lorsque les autres courbes seront connues; et, du segment $M\iota$, résultera le centre de courbure tangentielle de cette $m^{\text{ième}}$ courbe.

§ II. — Des formes de la fonction F.

176. Applications. — I. Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots$, des constantes, et

$$F = \sum \frac{A}{p}, \quad \frac{dF}{dp} = -\frac{A}{p^2}.$$

L'équation (2) prend les deux formes suivantes, dans la dernière desquelles S_n est la sous-normale (n° 142) :

$$\sum \frac{AH'}{p^2} R\cot\beta = 0, \quad \sum \frac{AH'S_n}{p^2} = 0.$$

La formule (4) du numéro précédent prend les deux formes suivantes :

$$\sum \frac{AH^2}{p^2 P\sin^3\beta} = \sum \frac{AH^2}{p^2 R}(1 + 2\cot^2\beta) - 2\sum \frac{AH^2}{p^3}\cot^2\beta + \sum \frac{A}{p^2}\frac{dH}{d\varepsilon}\cot\beta,$$

$$\sum \frac{AH^2}{p^2\sin^3\beta}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right) = \sum HA\cot^2\beta \frac{d}{dp}\left(\frac{H}{p^2}\right) + \sum \frac{A}{p^2}\frac{dH}{d\varepsilon}\cot\beta.$$

Nous faisons sur ces formules les remarques suivantes :

1° Si H ne dépend que de p, on peut écrire la dernière formule de la manière suivante :

$$\sum \frac{AH^2}{p^2 \sin^3\beta}\left(\frac{1}{P} - \frac{1+\cos^2\beta}{N}\right) + 2\sum \frac{AH^2}{p^3}\cot^2\beta = 0.$$

2° Si la surface est un plan, et que la courbe dn se réduise à un point, en représentant par T la tangente, n° 142, l'on a, pour la formule (2),

$$\sum \frac{A}{T} = 0;$$

et, d'une autre part, si l'on projette successivement le centre de courbure de ds sur la direction du rayon vecteur, cette projection sur la direction de la normale, et cette dernière projection sur la direction du rayon vecteur, en appelant $\mathfrak{P}$ la distance de cette troisième projection au point de la courbe correspondante, la formule (4) devient, en remplaçant K par $\frac{1}{K}$,

$$\sum \frac{A}{\mathfrak{P}} = \frac{1}{K}.$$

Ces deux formules montrent que les tangentes T aux courbes et les troisièmes projections $\mathfrak{P}$ des rayons de courbure satisfont à la loi des moyennes harmoniques, ce qui donne la construction, soit de la tangente, soit du rayon de courbure d'une courbe, lorsque les autres courbes sont connues.

3° Dans le cas d'une surface quelconque, si H ne dépend que de p, et si toutes les courbes, moins une ds_m, sont géodésiques, le rayon de courbure tangentielle de cette courbe sera donnée par la formule

$$\frac{A_m H_m^2}{p_m^2 \sin^3\beta_m}\frac{1}{P_m} = \sum \frac{AH^2}{p^2\sin^3\beta}\frac{1+\cos^2\beta}{N} - 2\sum\frac{AH^2}{p^3}\cot^2\beta.$$

II. Si $F = \sum Ap = K$,

$$\frac{dF}{dp} = A;$$

l'on obtient les formules suivantes, dans lesquelles S_n est la sous-normale :

$$\sum \mathrm{AH'R} \cot\beta = 0, \quad \sum \mathrm{AH'S}_n = 0,$$

$$\sum \frac{\mathrm{AH}^2}{\sin^3\beta}\left(\frac{1}{\mathrm{P}} - \frac{1+\cos^2\beta}{\mathrm{N}}\right) = \sum \mathrm{A} \cot\beta \frac{d\mathrm{H}}{d\varepsilon}.$$

III. Si $\mathrm{F} = \sum \log p = \mathrm{K}$,

$$\frac{d\mathrm{F}}{dp} = \frac{1}{p};$$

d'après cela, on obtient

$$\sum \frac{\mathrm{H}}{p} \cot\beta = 0,$$

$$\sum \frac{\mathrm{H}^2}{p \sin^3\beta}\left(\frac{1}{\mathrm{P}} - \frac{1+\cos^2\beta}{\mathrm{N}}\right) = \sum \cot\beta \frac{d\mathrm{H}}{p\,d\varepsilon} - \sum \frac{\mathrm{H}^2}{p^2} \cot^2\beta.$$

Ces formules donnent la construction géométrique d'une tangente ou d'un rayon de courbure géodésique, quand on connaît toutes les courbes moins une.

Elles sont susceptibles de nombreuses applications, parmi lesquelles se trouve la transformation des figures par rayons vecteurs géodésiques réciproques.

On réalise l'hypothèse $\sum \mathrm{A}p = \mathrm{K}$, dans le cas où la courbe dn se réduit à un point, et les coefficients A sont égaux à 1. On suppose m poulies infiniment petites fixées l'une à l'origine, les autres aux $m - 1$ courbes de manière à pouvoir les parcourir; un fil de longueur constante, attaché par une de ses extrémités à l'origine et tendu sur la surface, s'engorge sur la poulie placée sur la première courbe, pour revenir s'engorger sur la poulie placée à l'origine, puis il va s'engorger sur la deuxième poulie, et revient s'engorger sur la poulie placée à l'origine, et ainsi de suite; l'extrémité du fil décrit la dernière courbe, si toutes les poulies sont assujetties à se trouver constamment sur le même rayon géodésique.

177. Supposons que la fonction F soit la somme des valeurs d'une fonction ψ du paramètre différentiel H, pour les différentes courbes ds, dans le cas où ce paramètre ne dépend que de p; on a alors

$$F = \sum \psi(H) = K.$$

La formule (2) prend l'une des deux formes

$$\sum \frac{H^2}{R} \psi'(H) \cot\beta = 0, \quad \sum \frac{H^2}{T} \psi'(H) = 0,$$

et la formule (3) devient

$$\sum \frac{H^3\psi'}{R \sin^3\beta}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right) = \sum H \cot^2\beta \frac{d}{dp}\left(\frac{H^2\psi'}{R}\right).$$

Examinons seulement les trois cas suivants :

1° $\psi = AH$:

$$\sum \frac{AH^2}{T} = 0, \quad \sum \frac{AH^3}{R \sin^3\beta}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right) = \sum AH \cot^2\beta \frac{d(HH')}{dp};$$

2° $\psi = \frac{A}{H}$:

$$\sum \frac{A}{T} = 0, \quad \sum \frac{AH}{P \sin^3\beta}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right) + \sum AH \cot^2\beta \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{R}\right) = 0;$$

3° $\psi = \log H$:

$$\sum \frac{H}{T} = 0, \quad \sum \frac{H^2}{R \sin^3\beta}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right) = \sum HH'' \cot^2\beta.$$

Dans ces divers cas, on obtient la construction de la tangente et du rayon de courbure tangentielle.

178. Problème XIII. — *Connaissant la loi d'après laquelle n courbes s_1, s_2,... sont conjuguées suivant leurs rayons vecteurs géodésiques t_1, t_2,..., t_n, comptés sur une ligne géodésique tangente à une courbe $d\sigma$ à partir du point de contact, trouver*

la loi d'après laquelle les tangentes et les rayons de courbure tangentielle de ces courbes sont conjugués.

Nous conservons la notation précédente, et nous appelons $d\varepsilon$ l'angle de contingence de la courbe $d\sigma$, et Π son rayon de courbure tangentielle.

L'on a

$$dp = dt + d\sigma, \quad dh = \mathrm{H}(p, \varepsilon)\, d\varepsilon,$$

conséquemment

$$(3) \qquad \begin{cases} dt = (\mathrm{H}\cot\beta - \Pi)\, d\varepsilon, \\ d\beta = \left(\dfrac{1}{\mathrm{P}\sin\beta} - \dfrac{1}{\mathrm{R}}\right)\mathrm{H}\, d\varepsilon. \end{cases}$$

Soit l'équation qui lie les rayons (t), K étant une constante,

$$(1) \qquad \mathrm{F}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathrm{K}.$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à t, et qu'on élimine les dt au moyen des équations renfermées dans le premier des deux types (3), on obtient

$$(2) \qquad \Pi\sum\frac{d\mathrm{F}}{dt} = \sum\frac{d\mathrm{F}}{dt}\mathrm{H}\cot\beta = \sum\mathrm{H}'\frac{d\mathrm{F}}{dt}\mathrm{N}\cos\beta.$$

Cette équation est susceptible d'une interprétation géométrique analogue à celle que nous avons donnée de l'équation (2) du n° 174.

Elle exprime la loi d'après laquelle sont conjuguées les n tangentes aux courbes ds.

Différentions l'équation (2), et éliminons les dt et les $d\beta$ introduits par la différentiation au moyen des équations (3), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\sum\frac{\mathrm{H}^2}{\sin^3\beta}\frac{d\mathrm{F}}{dt}\left(\frac{1}{\mathrm{P}} - \frac{1}{\mathrm{N}}\right) \\ &\quad = \sum\left[\cot\beta\frac{d}{dt}\left(\mathrm{H}\frac{d\mathrm{F}}{dt}\right) - \Pi\frac{d^2\mathrm{F}}{dt^2}\right](\mathrm{H}\cot\beta - \Pi) - \frac{d\Pi}{d\varepsilon}\sum\frac{d\mathrm{F}}{dt} \\ &\qquad + \sum\cot\beta\frac{d\mathrm{F}}{dt}\frac{d\mathrm{H}}{d\varepsilon}. \end{aligned}$$

Et si la surface est développable, et que la courbe $d\sigma$ soit l'arête de rebroussement $H = t$, l'on obtient

$$\sum \frac{t^2 \dfrac{dF}{dt}}{\sin^2\beta}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)$$

$$= \sum\left[\cot\beta \frac{d}{dt}\left(t\frac{dF}{dt}\right) - H\frac{d^2F}{dt^2}\right](t\cot\beta - H) - \frac{dH}{d\varepsilon}\sum\frac{dF}{dt},$$

de laquelle on tire un grand nombre de conséquences.

CHAPITRE III.

COORDONNÉES GÉODÉSIQUES. — SYSTÈME INVERSE.

§ I. — Formules générales.

Dans ce système, on prend pour coordonnées : 1° les rayons vecteurs géodésiques p coupant une courbe donnée s sous un angle aussi donné β, ces rayons étant comptés à partir de la courbe ds; 2° les arcs orthogonaux dh de ces rayons.

179. Problème I. — *Enveloppe d'un rayon vecteur géodésique, coupant une courbe* $\frac{ds}{de} = \mathrm{P}$ *sous un angle* β *dont la loi est donnée par l'équation* $\frac{ds}{d\beta} = \mathrm{D}$, P *étant une fonction de* e, *et* D *une fonction de* β.

Rayon vecteur géodésique de l'enveloppe. — Soit dh l'élément de l'arc orthogonal, on a $dh = \mathfrak{H}(p, e)\,de$, $\mathfrak{H}(p, e)$ étant le paramètre différentiel du premier ordre dans ce système de coordonnées; or, au point de l'enveloppe, dh est nul et p devient égal à t. On a donc l'équation

$$(1) \qquad \mathfrak{H}(t, e) = 0,$$

qui détermine le rayon vecteur géodésique de l'enveloppe $t = \psi(e)$.

Tangente. — $\mathfrak{H}$ étant nul au point de l'enveloppe, appelons β_1 l'angle sous lequel l'enveloppe est rencontrée par le rayon t; la formule

$$(2) \qquad \cot\beta_1 = \frac{dt + ds\cos\beta}{\mathfrak{H}(t, e)\,de},$$

dont le dénominateur est nul en ce point, montre que l'angle

β_1 est aussi nul et que, par suite, le rayon vecteur t est en son extrémité tangent à la courbe-enveloppe $d\sigma$.

Différentielle de l'arc $d\sigma$. — On a aussi la formule

$$d\sigma = -dt + ds\cos\beta;$$

on en déduit, σ_0 étant la constante de l'intégration,

$$(3)\qquad \sigma - \sigma_0 = -t + \int ds\cos\beta = -t + \int D\cos\beta\, d\beta;$$

d'une autre part, on a la relation

$$(4)\qquad s = \int P\,de = \int D\,d\beta,$$

qui donne β en fonction de e; on a donc σ en fonction de e.

Angles de contingence. — Soit dp la distance géodésique de deux arcs orthogonaux infiniment voisins, on a

$$(5)\qquad d\sigma = -dt + ds\cos\beta.$$

Si l'on applique le théorème de Gauss au triangle dont les côtés géodésiques sont t, $t + dt$, et dont la base est $ds\cos\beta$, l'on a

$$-d\omega + d\varepsilon = \int_0^t \frac{d^2\mathfrak{H}}{dp^2}\,dp\,de = \left[\frac{d\mathfrak{H}}{dp} - \left(\frac{d\mathfrak{H}}{dp}\right)_0\right]de;$$

or $\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dp}\right)_0 de$ est égal à $d\omega$; l'équation précédente se réduit donc à

$$(6)\qquad d\varepsilon = \frac{d\mathfrak{H}}{dp}\,de.$$

Rayon de courbure de $d\sigma$. — Soit Π ce rayon de courbure; si l'on divise les deux membres de l'équation (5) par les deux membres de l'équation (6), on obtient

$$(7)\qquad \Pi = \frac{-dt + ds\cos\beta}{\frac{d\mathfrak{H}}{dp}\,de} = \frac{-\psi'(e)\,de + D\cos\beta\,d\beta}{\frac{d\mathfrak{H}}{dp}\,de},$$

équation qui fait connaître Π en fonction de e.

On en déduit, par élimination, l'équation naturelle de la courbe $d\sigma$.

180. *Relation entre les rayons de courbure tangentielle de la courbe directrice ds et de l'enveloppe dσ.* — Si l'on exprime dh en fonction de la distance géodésique t et de l'angle de contingence $d\varepsilon$ de l'enveloppe, on a (3), n° 141,

$$(8)\qquad dh = \mathrm{H}(t,\varepsilon)\,d\varepsilon,\quad d\omega = \mathrm{H}'(t,\varepsilon)\,d\varepsilon;$$

or, l'équation (4), prise simultanément avec la relation

$$d\omega = d\beta + de,$$

dans laquelle l'angle β est compté en sens inverse, fournit les relations suivantes, dans lesquelles R est le rayon de courbure tangentielle de l'arc orthogonal dh :

$$(9)\qquad \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}\sin\beta},\quad \frac{de}{d\omega} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}\sin\beta}.$$

Donc si l'on différentie par rapport à ε l'équation

$$(10)\qquad \frac{\sin\beta}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{P}} + \frac{1}{\mathrm{D}},$$

on obtient

$$(11)\qquad \frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} = \frac{\mathrm{H}'\mathrm{R}^3}{\sin^2\beta}\left(\frac{\cos\beta}{\mathrm{DR}} + \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}^3} + \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}^3}\right),$$

dans laquelle P' est la dérivée de P par rapport à e, et D' est la dérivée de D par rapport à β. Or le rayon R, qui est égal au rapport $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'}$, étant une fonction de t et de ε, donne par la différentiation une expression de la forme suivante :

$$(12)\qquad -\frac{dt}{d\varepsilon} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon},$$

A et B étant des fonctions déterminées de t et de ε. Maintenant si l'on remarque que l'équation (7) peut s'écrire sous la forme

$$(13)\qquad \Pi = \mathrm{H}'\mathrm{R}\cot\beta - \frac{dt}{d\varepsilon},$$

et si l'on élimine $\frac{dt}{d\varepsilon}$, $\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}$ entre les trois dernières équations, on

obtient, en remarquant que $\frac{1}{N} = \frac{\sin\beta}{R}$, la relation suivante :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{-\Pi + A + H'N\cos\beta}{BN^3} + \frac{H'D'\sin\beta + D\cos\beta}{D^3} \\ &\qquad + \frac{H'P'\sin\beta + \frac{P^2}{D}\cos\beta}{P^3} = 0, \end{aligned} \right.$$

qui permet de construire le rayon de courbure Π de l'enveloppe $d\sigma$ au moyen des données de la question.

Dans cette équation A est linéaire, B et H' sont deux rapports, et il est aisé de voir que les deux dérivées H' et $\mathfrak{H}'$ sont liées entre elles par la relation

$$(15) \qquad H'\mathfrak{H}' = \frac{D}{P + D}.$$

Lorsque la surface est un plan, il faut dans les formules précédentes poser

$$A = 0, \quad B = -1, \quad H = t, \quad H' = 1.$$

Si la surface est une sphère, il faut poser les relations suivantes :

$$A = 0, \quad BH' = -\cos^3\tau, \quad H = a\sin\tau, \quad H' = \cos\tau.$$

Il en résulte des formules que nous nous dispensons d'écrire.

§ II. — Des développées par rayons vecteurs géodésiques.

181. Problème II. — *Trouver la développée par rayons vecteurs géodésiques d'une ligne donnée.*

On appelle ainsi l'enveloppe d'un rayon vecteur géodésique constamment normal à une courbe $\frac{ds}{de} = P$, tracée sur une surface donnée.

Pour trouver les éléments de la développée, il n'y a qu'à supposer β égal à $\frac{\pi}{2}$ dans le calcul précédent; on obtient ainsi :

Rayon vecteur géodésique de l'enveloppe. — Il est donné par l'équation

$$(1) \qquad \mathfrak{H}(t, e) = 0.$$

Tangente. — Rectification de la développée. — Le rayon vecteur t est tangent à la développée, et la formule (3) donne

$$(3) \qquad \sigma + t = \sigma_0 = \text{const.}$$

Angle de contingence tangentielle $d\varepsilon$. — Cet angle est donné par la formule

$$(6) \qquad d\varepsilon = \frac{d\mathfrak{H}}{dp}\, de.$$

Rayon de courbure tangentielle. — L'équation (7) devient

$$(7) \qquad \Pi = -\frac{dt}{\mathfrak{H}'de} = -\frac{dt}{d\varepsilon}.$$

Relation entre les rayons de courbure de la courbe et de sa développée. — Si l'on exprime dh en fonction de la distance géodésique t et de l'angle de contingence $d\varepsilon$ de l'enveloppe, on a

$$(8) \qquad dh = \mathrm{H}(t, \varepsilon)\, d\varepsilon, \quad d\omega = \mathrm{H}'(t, \varepsilon)\, d\varepsilon, \quad d\omega = de.$$

Si l'on veut déterminer t au moyen de la première des équations (8); il faut remarquer que t étant compté à partir de la développée, on a, au point où ce rayon vecteur rencontre la courbe donnée $\frac{ds}{de}$, $dh = \mathrm{P}\, de$; on aura donc l'équation

$$\mathrm{PH}'(t, \varepsilon) = \mathrm{H}(t, \varepsilon).$$

Les équations (9) et (13) donnent

$$(9) \qquad \mathrm{P} = \mathrm{R}, \qquad (13) \qquad \Pi = -\frac{dt}{d\varepsilon}.$$

L'équation (14) se réduit à la relation

$$(14) \qquad \Pi - \mathrm{A} = \mathrm{BH'P'}.$$

L'équation (15), dans laquelle il faut faire D infinie, se réduit à

$$(15) \qquad \mathrm{H}'\mathfrak{H}' = 1.$$

182. Applications. — *Développée de la courbe sphérique* $\frac{ds}{de} = c\mathrm{E}^{m(e+e_0)}$, *$c$, m, e_0 étant des constantes, et* E *la base des*

logarithmes népériens. — L'équation (14) donne

$$\Pi = -mc\cos^3\tau\,\mathrm{E}^{m(\varepsilon+\varepsilon_0)};$$

or, si l'on remarque que $\dfrac{ds}{de} = \mathrm{P} = a\,\mathrm{tang}\,\tau$, on a

$$a\,\mathrm{tang}\,\tau = c\,\mathrm{E}^{m(\varepsilon+\varepsilon_0)},$$

qui est l'équation de la courbe proposée dans le système inverse de coordonnées tangentielles. Eliminant les exponentielles entre ces deux équations, on obtient, en remplaçant Π par sa valeur $-a\dfrac{d\tau}{d\varepsilon}$, l'équation suivante

$$m\,d\varepsilon = \frac{d\tau}{\sin\tau\cos^2\tau}.$$

Si l'on pose $x = \mathrm{tang}\,\tau$, cette équation s'écrit sous la forme

$$m\,d\varepsilon = \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} + \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

dont l'intégrale est, $m\varepsilon_0$ étant la constante d'intégration,

$$m(\varepsilon-\varepsilon_0) = -\log\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + \sqrt{1+x^2}.$$

On a donc, en remplaçant x par sa valeur et en passant aux exponentielles,

$$\mathrm{tang}\,\frac{\tau}{2} = \mathrm{E}^{-\frac{1}{\cos\tau}+m(\varepsilon-\varepsilon_0)}.$$

Si, dans cette équation, on remplace $a\tau$ par sa valeur $\sigma_0 - \sigma$, on obtient

$$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0-\sigma}{a}\right) = \mathrm{E}^{-\frac{1}{\cos\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)}+m(\varepsilon-\varepsilon_0)},$$

dont la différentielle par rapport à σ sera l'équation naturelle de la développée de la courbe.

183. Problème III. — *Trouver les développées successives par rayons vecteurs géodésiques d'une ligne donnée.*

Nous conservons la même notation que dans le n° 181, avec cette différence, que nous représentons par les mêmes lettres les éléments des développées successives, analogues à ceux de la courbe donnée, ces lettres étant marquées de l'indice 1, 2,..., suivant qu'il s'agit d'une développée première, d'une développée de développée ou développée seconde, et ainsi de suite. D'après cela, on aura cette série d'équations :

$$(1) \qquad s_1 + t = b, \quad s_2 + t_1 = b_1, \ldots, \quad s_n + t_{n-1} = b_{n-1},$$

dans lesquelles b, $b_1, \ldots, b_n$ sont des constantes;

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} de &= \mathrm{H}'(t, e_1)\, de_1, \\ de_1 &= \mathrm{H}'_1(t_1, e_2)\, de_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ de_{n-1} &= \mathrm{H}'_{n-1}(t_{n-1}, e_n)\, de_n; \end{aligned} \right.$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} dh &= \mathrm{H}(t, e_1)\, de_1, \\ dh_1 &= \mathrm{H}_1(t_1, e_2)\, de_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dh_{n-1} &= \mathrm{H}_{n-1}(t_{n-1}, e_n)\, de_n; \end{aligned} \right.$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}_1 &= \mathrm{A} + \mathrm{BH'P'}, \\ \mathrm{P}_2 &= \mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1 \mathrm{H}'_1 \mathrm{P}'_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{P}_n &= \mathrm{A}_{n-1} + \mathrm{B}_{n-1} \mathrm{H}'_{n-1} \mathrm{P}'_{n-1}. \end{aligned} \right.$$

Relations résultantes. — Des équations (2) on déduit

$$(5) \qquad de = \mathrm{H}' \mathrm{H}'_1 \mathrm{H}'_2 \ldots \mathrm{H}'_{n-1}\, de_n.$$

Si l'on différentie par rapport à e_1 la première des équations (4), et qu'on substitue dans la deuxième de la même série, on obtient

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1 \mathrm{H}'_1 \frac{d}{de_1}\left(\mathrm{A} + \mathrm{BH}' \frac{d\mathrm{P}}{de}\right).$$

Si l'on différentie cette dernière par rapport à e_2, et qu'on substitue dans la troisième de la série (4), on aura

$$\mathrm{P}_3 = \mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_2 \mathrm{H}'_2 \frac{d}{de_2}\left[\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1 \mathrm{H}'_1 \frac{d}{de_1}\left(\mathrm{A} + \mathrm{BH}' \frac{d\mathrm{P}}{de}\right)\right],$$

et ainsi de suite.

On peut, à raison de l'équation (5), écrire cette dernière sous la forme suivante :

$$(6)\ P_3 = A_2 + B_2 H' H'_1 H'_2 \frac{d}{de}\left[A_1 + B_1 H' H'_1 \frac{d}{de}\left(A + BH' \frac{dP}{de}\right)\right].$$

On a donc généralement le rayon de courbure tangentielle de la développée $n^{ième}$ en fonction du rayon de courbure tangentielle de la courbe ds et des dérivées par rapport à e de ces rayons.

Les équations (4) ont été obtenues par la dérivation par rapport à e, e_1, e_2, ... des équations

$$(7)\qquad P = \frac{H}{H'},\quad P_1 = \frac{H_1}{H'_1},\ \ldots,\quad P_n = \frac{H_n}{H'_n}.$$

Cas où les $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *ne dépendent que de* $t_1, t_2, \ldots, t_n$. — Les valeurs de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont nulles, et celles de B_1, $B_2, \ldots, B_n$ sont données par les relations

$$(8)\quad \frac{1}{B} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{H}{H'}\right),\quad \frac{1}{B_1} = -\frac{d}{dt_1}\left(\frac{H_1}{H'_1}\right),\quad \frac{1}{B_n} = -\frac{d}{dt_n}\left(\frac{H_n}{H'_n}\right).$$

L'équation (6) se simplifie et devient

$$(6')\qquad P_3 = B_2 H' H'_1 H'_2 \frac{d}{de}\left[B_1 H' H'_1 \frac{d}{de}\left(BH' \frac{dP}{de}\right)\right],$$

qu'il est facile de généraliser.

Supposons qu'on veuille exprimer le second membre de cette dernière équation en fonction de t, on exprimera t_1 en fonction de t et de ses dérivées par rapport à e, en portant les valeurs de P et de P_1 tirées des équations (7) dans la première des équations (4), dans laquelle A est nul; on obtient ainsi

$$(9)\qquad -\frac{H_1}{H'_1} = \frac{\dfrac{d}{de}\left(\dfrac{H}{H'}\right)}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{H}{H'}\right)} H',$$

qui donne t_1 en fonction de t et de ses deux dérivées par rapport à e; on obtiendra de la même manière t_2 en fonction de t_1 et

de ses dérivées par rapport à e, en opérant sur les deux équations suivantes, on aura donc t_1 en fonction de t et de ses dérivées premières en secondes par rapport à e, et ainsi de suite.

184. Première application : *Des développées successives (surface sphérique).* — Si l'on applique les formules précédentes à la sphère, on obtient

$$(1)\quad \begin{cases} a\tau + \int P_1 de_1 = b, \quad a\tau_1 + \int P_2 de_2 = b_1, \ldots, \\ a\tau_{n-1} + \int P_n de_n = b_{n-1}; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} de = \cos\tau\, de_1, \quad de_1 = \cos\tau_1\, de_2, \ldots, \\ de_{n-1} = \cos\tau_{n-1}\, de_n; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} dh = a\sin\tau\, de_1, \quad dh_1 = a\sin\tau_1\, de_2, \ldots, \\ dh_{n-1} = a\sin\tau_{n-1}\, de_n; \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} P = a\,\mathrm{tang}\,\tau, \quad P_1 = a\,\mathrm{tang}\,\tau_1, \ldots, \\ P_{n-1} = a\,\mathrm{tang}\,\tau_{n-1}; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} -P_1 = \cos^3\tau \dfrac{dP}{de}, \quad -P_2 = \cos^3\tau_1 \dfrac{dP_1}{de_1}, \ldots, \\ -P_n = \cos^3\tau_{n-1} \dfrac{dP_{n-1}}{de_{n-1}}; \end{cases}$$

$$(5)\quad de = \cos\tau \cos\tau_1 \cos\tau_2 \ldots \cos\tau_{n-1}\, de_n;$$

$$(8)\quad \begin{cases} H'B = -\cos^3\tau, \quad H'_1 B_1 = -\cos^3\tau_1, \ldots. \\ H'_{n-1} B_{n-1} = -\cos^3\tau_{n-1}; \end{cases}$$

$$(6)\quad P_3 = \cos\tau \cos\tau_1 \cos^3\tau_2 \frac{d}{de}\left[\cos\tau \cos^3\tau_1 \frac{d}{de}\left(\cos^3\tau \frac{dP}{de}\right)\right].$$

Les formules (4) peuvent aussi s'écrire sous la forme

$$(4')\quad \begin{cases} -P_1 = a\cos\tau \dfrac{d\tau}{de}, \quad -P_2 = a\cos\tau_1 \dfrac{d\tau_1}{de_1}, \ldots, \\ -P_n = a\cos\tau_{n-1} \dfrac{d\tau_{n-1}}{de_{n-1}}. \end{cases}$$

Si l'on veut exprimer $P_1, P_2, \ldots$ en fonction de τ et de ses dé-

rivées, on remarquera que la comparaison de la deuxième des formules (7) avec la première des formules (4′) donne

$$-\operatorname{tang}\tau_1 = \cos\tau \frac{d\tau}{de};$$

on en déduit la dérivée de τ_1 par rapport à e_1; au moyen de ces valeurs, on obtient successivement

$$-P_1 = a\cos\tau \frac{d\tau}{de},$$

$$P_2 = a \frac{\cos\tau \frac{d}{de}\left(\cos\tau \frac{d\tau}{de}\right)}{\left(1 + \cos^2\tau \frac{d\tau^2}{de^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

et ainsi de suite.

185. Deuxième application : *De la courbe sphérique dont le rayon de courbure tangentielle est proportionnel à celui de sa développée par rayons vecteurs géodésiques.*

L'équation de condition est $P_1 = mP$, m étant une constante. Si l'on remplace, dans cette équation, P par sa valeur tirée de la première des équations (7) n° 184, et P_1 par sa valeur tirée de la première des équations (4′), l'on a l'une des deux équations différentielles suivantes :

$$(1) \qquad -de = m^{-1}\frac{\cos^2\tau}{\sin\tau}d\tau,$$

$$(2) \qquad -de_1 = m^{-1}\frac{\cos\tau}{\sin\tau}d\tau.$$

L'intégrale de la seconde, en représentant par K une constante, est

$$(3) \qquad \sin\tau = KE^{-me_1},$$

E étant la base de logarithmes népériens. L'équation (3) est l'équation de la courbe dans le système de coordonnées τ, e_1.

L'équation naturelle de la développée s'obtient en différentiant l'équation (3) par rapport à e_1, et en remplaçant $a\frac{d\tau}{de_1}$ par

$-\frac{ds_1}{de_1}$; on obtient ainsi

$$(4)\qquad \frac{ds_1}{de_1} = \frac{-amKE^{-me_1}}{\sqrt{1-K^2E^{-2me_1}}},$$

dont l'intégrale est, en représentant par $s_1^{(0)}$ la constante d'intégration,

$$(5)\qquad \frac{1}{am}(s_1 - s_1^{(0)}) = \sqrt{1-K^2E^{-2me_1}},$$

ce qui donne la rectification de la développée.

D'une autre part, on a, par suite de la première des équations (3),

$$(6)\qquad ds = aKE^{-me_1}de_1,$$

et, en représentant par s_0 une constante,

$$(7)\qquad s - s_0 = -\frac{aK}{m}E^{-me_1}.$$

Des équations (5) et (7) on déduit la relation

$$\frac{1}{m^2}(s_1 - s_1^{(0)})^2 + m^2(s-s_0)^2 = a^2.$$

Ainsi les arcs correspondants de la courbe et de sa développée sont les coordonnées d'une section conique rapportée à son centre et à ses axes.

Il est facile de vérifier que, lorsqu'on exprime les rayons de courbure tangentielle P et P_1 en fonction de la même variable e_1, et qu'on en prend le rapport, on trouve le nombre constant m.

L'équation (1) aurait conduit aux mêmes résultats, mais d'une manière un peu moins simple.

L'équation naturelle de la courbe s est donnée par la première des équations (4) mise sous la forme

$$m\frac{de}{a^3} + \frac{dP}{P(a^2+P^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

laquelle s'intègre immédiatement.

18.

§ III. — Des développées obliques par rayons vecteurs géodésiques.

186. Problème IV. — *Trouver la développée oblique par rayons vecteurs géodésiques d'une courbe donnée.*

On appelle ainsi l'enveloppe d'un rayon vecteur géodésique t, coupant sous un angle constant une courbe située sur la surface.

Les données sont les mêmes que dans le n° 179 avec la condition $\beta = \text{const.}$; il n'y a donc qu'à poser D infini dans les formules de ce numéro.

Rayon vecteur géodésique de l'enveloppe. — Il est donné par les équations

$$(1) \qquad de = \mathrm{H}'(t, \varepsilon)\, d\varepsilon, \quad \frac{\mathrm{H}(t, \varepsilon)}{\mathrm{H}'(t, \varepsilon)} = \mathrm{P}\sin\beta.$$

Rayon de courbure tangentielle de la développante de l'enveloppe. — On a la relation

$$(2) \qquad \mathrm{R} = \mathrm{P}\sin\beta.$$

On déduit les proportions suivantes :

1° L'enveloppe des rayons vecteurs géodésiques est telle que, si l'on fait passer par le point considéré de la courbe ds, un arc de développante de l'enveloppe, le rayon de courbure tangentielle de cette développante est la projection du rayon de courbure tangentielle de la courbe proposée ds.

2° Pour un même point m pris sur la courbe ds, le lieu des centres de courbure tangentielle des développantes passant par ce point, des diverses enveloppes que l'on obtient en donnant toutes les valeurs possibles à l'inclinaison β des rayons vecteurs géodésiques sur la courbe, est une circonférence de cercle.

Rectification. — Si l'on intègre l'équation (3), n° 179, on obtient, σ_0 étant une constante,

$$(3) \qquad \sigma - \sigma_0 = s\cos\beta - t.$$

Cette équation fait connaître l'arc σ de l'enveloppe en fonction de la variable e.

Rayon de courbure tangentielle de la développée oblique. — On a les trois équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sin\beta\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{R^2}{P^2}H'P',\\ &-\frac{dt}{d\varepsilon} = A + B\frac{dR}{d\varepsilon},\\ &\Pi = H'R\cot\beta - \frac{dt}{d\varepsilon}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine $\frac{dt}{d\varepsilon}$, $\frac{dR}{d\varepsilon}$ entre ces équations, on obtient

$$(5)\qquad \frac{\Pi - A}{BH'} = \frac{P}{B}\cos\beta + P'\sin\beta.$$

On trouverait la même équation en faisant D infini dans la relation (14) du n° **180**. L'équation (5) donne une construction simple du rayon de courbure tangentielle de la développée oblique.

Application : *Développée oblique d'un petit cercle* $\frac{ds}{de} = m$ (n° **153**). — On a, d'après la deuxième des équations (1),

$$a\tang\tau = m\sin\beta;$$

on en conclut que le rayon géodésique $a\tau$ est constant. L'équation (3) donne

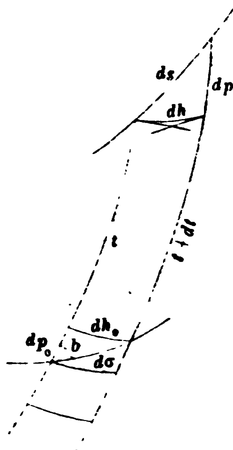
$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = m\cos\beta\cos\tau.$$

Cette équation montre que le rayon de courbure tangentielle de la développée oblique est constant; donc cette développée est un cercle. Ces résultats se confirment directement par la Géométrie.

187. Problème V. (*Généralisation.*) — *Étant donnée une courbe* $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \Pi$ *sur une surface, on trace des rayons vecteurs*

géodésiques t formant avec cette courbe des angles b dont la loi est donnée $\frac{d\sigma}{db} = \omega$; *ces rayons vecteurs t satisfont à la loi*

Fig. 17.



$t = \psi(\varepsilon)$: *déterminer les éléments de la courbe décrite par les extrémités des rayons vecteurs t.*

Nous conservons la notation admise jusqu'à présent. Le lieu décrit sera la courbe $\frac{ds}{de} = \mathrm{P}$.

Soit dh[1] l'arc d'une ligne orthogonale compris entre deux rayons vecteurs quelconques infiniment voisins, dh_0 l'arc qui se rapporte à un point de la courbe $d\sigma$ et dh celui qui se rapporte à un point de ds. Soit dp[1] l'arc géodésique compris entre deux arcs orthogonaux infiniment voisins; dp_0, dp les arcs géodésiques qui se rapportent aux courbes $d\sigma$ et ds.

Tangente. — On a les équations

$$(1) \qquad dh = \mathfrak{H}(t, \varepsilon)\, d\varepsilon, \quad dh_0 = \mathfrak{H}(0, \varepsilon)\, d\varepsilon,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \sin b = \dfrac{dh_0}{d\sigma}, \quad \cos b = \dfrac{dp_0}{d\sigma}, \\ \sin\beta = \dfrac{dh}{ds}, \quad \cos\beta = \dfrac{dp}{ds}, \quad dt = dp - dp_0; \end{cases}$$

l'origine des lignes géodésiques p est une ligne orthogonale déterminée.

Différentielle de l'arc ds. — On déduit des équations précédentes

$$p = t + \int \Pi \cos b \, d\varepsilon, \quad ds^2 = \left(\mathfrak{H}^2 + \frac{dp^2}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon^2,$$

$$\frac{ds^2}{d\varepsilon^2} = \mathfrak{H}^2 + \left(\psi' + \Pi \cos b\right)^2. \tag{3}$$

Angles de contingence. — Si l'on applique le théorème de Gauss au quadrilatère dont les côtés opposés sont $d\sigma$, dh, en remarquant que $d\omega$ se rapporte à l'arc dh et $d\omega_0$ à l'arc dh_0, on obtient l'équation

$$d\omega = \mathfrak{H}'(t, \varepsilon) d\varepsilon; \tag{4}$$

de plus le triangle dont les côtés sont dh, ds, dp, donne

$$d\omega = de - d\beta. \tag{5}$$

Rayon de courbure tangentielle. — La ligne orthogonale dh, a pour rayon de courbure tangentielle R qui a pour expression

$$\mathrm{R} = \frac{\mathfrak{H}(t, \varepsilon)}{\mathfrak{H}'(t, \varepsilon)}; \tag{6}$$

on a aussi

$$\frac{\sin\beta}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{P}} - \frac{d\beta}{ds}; \tag{7}$$

si l'on différentie l'équation

$$\cot\beta = \frac{dp}{dh},$$

on obtient

$$-\frac{d\beta}{\sin^2\beta} = d\left(\frac{dt + \Pi \cos b \, d\varepsilon}{\mathfrak{H} \, d\varepsilon}\right);$$

et, en substituant dans l'équation (7), on trouve

$$\frac{1}{\mathrm{P}} = \frac{\frac{\mathfrak{H}}{\mathrm{R}}\left[\mathfrak{H}^2 + \left(\frac{dt}{d\varepsilon} + \Pi \cos b\right)^2\right] - \mathfrak{H}^2 \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{dt + \Pi \cos b \, d\varepsilon}{\mathfrak{H} \, d\varepsilon}\right)}{\left[\mathfrak{H}^2 + \left(\frac{dt}{d\varepsilon} + \Pi \cos b\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

Ces relations donnent tous les éléments de la courbe ds en fonction de la variable indépendante ε.

Conséquences. — Il est facile de déduire de ces formules celles qui se rapportent aux différents problèmes que nous avons traités :

1° Celles dans lesquelles les rayons vecteurs géodésiques t sont tangents à la courbe $d\sigma$: il faut supposer l'angle b nul ;

2° Celles qui se rapportent à l'enveloppe des rayons vecteurs géodésiques coupant une courbe $d\sigma$ sous un angle quelconque b : il faut, dans ce cas, supposer l'angle β nul ;

3° Celles qui se rapportent à des rayons géodésiques rectilignes, et dont nous avons déjà trouvé des exemples dans l'étude des lignes tracées sur les surfaces réglées (n° 101).

CHAPITRE IV.

DES LIGNES CONJUGUÉES SUIVANT LEURS TANGENTES GÉODÉSIQUES CONCOURANTES EN UN POINT D'UNE COURBE DIRECTRICE.

§ I. — FORMULES GÉNÉRALES.

188. PROBLÈME I. — *Un nombre m de rayons vecteurs géodésiques sont menés d'un point* A *situé sur une courbe donnée* $\frac{ds}{de} = \text{P}$, *et forment, en ce point avec la tangente à cette courbe, des angles* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *liés entre eux par la relation*

$$\text{F}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m) = a, \tag{1}$$

a étant une constante, m — 1 *de ces rayons enveloppent m* — 1 *courbes données, enveloppe du dernier rayon vecteur géodésique lorsque le point* A *décrit la courbe directrice.*

Notation. — Soient $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots, d\sigma_{m-1}$ les arcs des courbes enveloppées, $t_1, t_2, \ldots, t_m$ les rayons vecteurs géodésiques comptés à partir des points de contact jusqu'au point A; p_1, $p_2, \ldots, p_m$ les rayons vecteurs géodésiques comptés à partir du point A jusqu'à des développantes déterminées des courbes $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots, d\sigma_m$; $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, \ldots, d\varepsilon_m$ les angles de contingence tangentielle de ces dernières courbes : on conserve pour tout le reste la notation déjà employée.

Équations différentielles. — On a les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} dh = \text{H}(t, \varepsilon)\,d\varepsilon, & d\omega = \text{H}'(t, \varepsilon)\,d\varepsilon, & \dfrac{\sin\beta}{\text{R}} = \dfrac{1}{\text{P}} + \dfrac{1}{\text{D}}, \\ \dfrac{d\omega}{d\beta} = \dfrac{\text{D}}{\text{R}}\sin\beta, & \dfrac{d\omega}{de} = \dfrac{\text{P}}{\text{R}}\sin\beta, & dp = dt + d\sigma, \end{array}\right. \tag{2}$$

les lettres dénuées d'accent se rapportant à une courbe quelconque.

Points de contact. — Si l'on différentie l'équation (1) par rapport aux angles β, et qu'on élimine les $d\beta$ au moyen des équations renfermées dans la troisième du groupe précédent, on obtient

$$(3) \qquad \sum \frac{dF}{d\beta}\left(\frac{\sin\beta}{R} - \frac{1}{P}\right) = 0;$$

cette équation fait connaître, en fonction de ω_m, le rayon de courbure tangentielle de la développante passant par le point A de l'enveloppe cherchée $d\sigma_m$. De ce rayon de courbure tangentielle, on déduit le $m^{\text{ième}}$ rayon géodésique t_m. En effet, si l'on porte la valeur trouvée pour R_m dans l'équation

$$(4) \qquad R_m = \frac{H(t_m, \varepsilon_m)}{H'(t_m, \varepsilon_m)},$$

on obtient la valeur de t_m en fonction de ω_m et de ε_m; et, en portant cette valeur dans la relation

$$d\omega_m = H'_m(t_m, \varepsilon_m)\,d\varepsilon_m,$$

on obtient ε_m et t_m en fonction de ω_m.

189. *Rayon de courbure tangentielle.* — Différentions la troisième des équations (2), et posons

$$\frac{dR}{d\omega} = R', \quad \frac{dP}{de} = P', \quad \frac{dD}{d\beta} = D';$$

on trouve

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\cos\beta}{D} - \frac{R'}{N^2}\right) + \frac{P'}{P^3} + \frac{D'}{D^3} = 0;$$

en multipliant les m équations contenues dans ce type respectivement par $\frac{dF}{d\beta_1}, \frac{dF}{d\beta_2}, \dots, \frac{dF}{d\beta_m}$, et, en ajoutant, on trouve

$$\sum \frac{dF}{d\beta}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\cos\beta}{D} - \frac{R'}{N^2}\right) + \frac{P'}{P^3} + \frac{D'}{D^3}\right] = 0;$$

or, si l'on différentie l'équation (3), ou son égale,

$$\sum \frac{dF}{d\beta}\frac{1}{D} = 0,$$

l'on a

$$\sum \frac{dF}{d\beta}\frac{D'}{D^3} = \sum\left[\frac{1}{D}\frac{d}{d\beta}\left(\sum \frac{dF}{d\beta}\right)\right];$$

on peut écrire symboliquement le second membre sous la forme $\left(\sum \frac{1}{D}\frac{d}{d\beta}\right)^2 F$, pourvu que, lorsqu'on aura effectué les opérations, on regarde les exposants comme des indices de différentiation. D'après cela, l'élimination de $\sum \frac{dF}{d\beta}\frac{D'}{D^3}$ entre les deux dernières équations donne

$$(5)\quad \sum \frac{dF}{R\,d\beta}\left(\frac{R'}{N^2} - \frac{\cos\beta}{D}\right) = \frac{P'}{P^3}\sum \frac{dF}{d\beta} + \left(\sum \frac{1}{D}\frac{d}{d\beta}\right)^2 F.$$

Cette équation fait connaître $\frac{dR_m}{d\omega_m}$, c'est-à-dire la dérivée du rayon de courbure d'une développante de l'enveloppe $d\sigma_m$, cette développante passant par le point A.

Rayon de courbure de l'enveloppe. — Différentions, par rapport à ω_m, l'équation (4) mise sous la forme $R_m = F_m(t_m, \varepsilon_m)$,

$$(6)\quad \frac{dR_m}{d\omega_m} = \frac{dF_m}{H'_m\,d\varepsilon_m} + \frac{dt_m}{d\omega_m}\frac{dF_m}{dt_m},$$

or, on a les deux équations

$$dt_m = \cot\beta_m\,dh_m - d\sigma_m, \quad d\omega_m = H'_m(t_m, \varepsilon_m)\,d\varepsilon_m;$$

si l'on divise la première par la seconde, en se rappelant que Π_m est le rayon de courbure tangentielle de l'enveloppe, on obtient

$$(7)\quad \frac{dt_m}{d\omega_m} = \frac{\cot\beta_m}{R'_m} - \frac{\Pi_m}{H'_m},$$

et, conséquemment, en éliminant $\frac{dt_m}{d\omega_m}$ entre les équations (6) et (7), on trouve

$$(8)\quad \frac{dR_m}{d\omega_m} = \frac{dF_m}{H'_m\,d\varepsilon_m} + \left(\frac{\cot\beta_m}{R'_m} - \frac{\Pi_m}{H'_m}\right)\frac{dF_m}{dt_m}.$$

Cette dernière équation donne le rayon de courbure tangentielle Π_m de l'enveloppe $d\sigma_m$ en fonction de $\frac{dR_m}{d\omega_m}$; or, comme

nous l'avons déjà remarqué, cette dérivée est connue par suite de l'équation (5).

§ II. — Des roulettes.

190. *Des roulettes sphériques.* — Les formules qui précèdent se prêtent sans difficulté à de nombreuses et à d'importantes applications. Nous allons en premier lieu déduire de ces formules la théorie des roulettes sphériques. Les propriétés des roulettes planes s'en déduiraient avec non moins de facilité. D'ailleurs, elles résultent par des changements évidents des propriétés des roulettes sphériques.

Problème II. — *Soient (fig. 18) deux surfaces sphériques égales et concentriques, l'une immobile, l'autre mobile autour de son centre, par cette condition qu'une courbe* C' *située sur sa surface, et invariablement liée avec elle, roule sans glissement sur un courbe* C *située sur la surface sphérique immobile; il s'agit de trouver sur cette surface l'enveloppe* ν *d'une courbe* ν' *située sur la surface mobile.*

Notation. — Soient $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ les rayons de courbure tangentielles des courbes ν, ν' en leur point de contact E, on rapporte la développée de la courbe ν à ses coordonnées tangentielles t, β par rapport à la courbe C comme directrice, et la développée de ν' à ses coordonnées tangentielles t', β' par rapport à la courbe C' comme directrice, lorsque les deux courbes C et C' sont tangentes en un point A; $d\sigma$, $d\varepsilon$, $d\sigma'$, $d\varepsilon'$ sont l'arc élémentaire et l'angle de contingence tangentielle de ces deux développées. Pour tout le reste, les notations admises sont conservées.

Équations différentielles. — Les courbes C et C' étant tangentes en A, dans une quelconque de leur position, on a les relations suivantes :

$$(1)\quad \frac{a\sin\tau' d\varepsilon'}{ds'} = \sin\beta',\quad \frac{d(t'+\sigma')}{ds'} = \cos\beta',\quad \frac{1}{P'} = \frac{\sin\beta'}{R'} - \frac{d\beta'}{ds'};$$

$$(2)\quad \frac{a\sin\tau d\varepsilon}{ds} = \sin\beta,\quad \frac{d(t+\sigma)}{ds} = \cos\beta,\quad \frac{1}{P} = \frac{\sin\beta}{R} - \frac{d\beta}{ds};$$

auxquelles il faut joindre les conditions

$$(3)\qquad ds = ds',\quad \beta + \beta' = 180^\circ.$$

Tangente à l'enveloppe. — Si l'on ajoute membre à membre les deuxièmes équations des groupes (1) et (2) et qu'on ait égard aux équations (3), on trouve

$$d(t + \sigma + t' + \sigma') = 0.$$

Soient maintenant ι, ι' les arcs de grand cercle menés du point de contact E des courbes ν et ν' jusqu'à leurs centres respectifs de courbure géodésique (*), l'on aura successivement

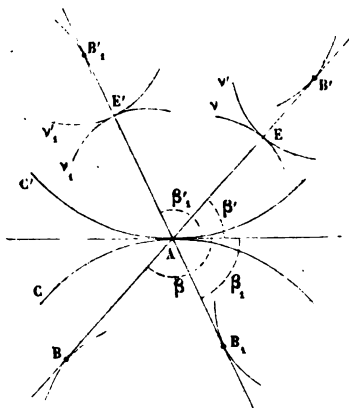
$$d\sigma = -\cos^2\iota\, d\mathfrak{R} = -\frac{a^2 d\mathfrak{R}}{a^2 + \mathfrak{R}^2}, \quad d\sigma' = -\cos^2\iota' d\mathfrak{R}' = -\frac{a^2 d\mathfrak{R}'}{a^2 + \mathfrak{R}'^2},$$

portant ces valeurs dans l'équation précédente et intégrant, on trouve

$$(4) \qquad \tau + \tau' = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\mathfrak{R}}{a}\right) + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\mathfrak{R}'}{a}\right) = \iota + \iota'.$$

Or τ et τ' étant sur un même grand cercle, il en est de même de ι et de ι'. Donc, le point de contact A des deux courbes C

Fig. 18.



et C' et le point de contact E des courbes ν et ν' se trouvent sur le même arc de grand cercle que les centres de courbure géodésique des courbes ν et ν'. Cette conséquence, qui s'établit aussi par la Géométrie, donne le point de contact E de la

(*) Nous appelons *centre de courbure géodésique d'une courbe* le point d'intersection de deux lignes géodésiques, infiniment voisines, normales à cette courbe.

courbe ν' et de son enveloppe ν, et par conséquent, la normale à cette courbe. On déduit les propositions suivantes :

Théorème I. — *Le point de contact* E *de la courbe* ν' *et de son enveloppe* ν *est le point où un grand cercle mené du point de contact* A *des deux courbes* C *et* C', *perpendiculairement à la courbe* ν', *rencontre cette ligne.*

Corollaire I. — Le mouvement élémentaire de la sphère mobile a lieu à chaque instant autour du rayon de la sphère passant par le point A de contact de la courbe roulante C' sur la directrice C. En effet, la courbe ν' quelconque coupant orthogonalement au point E l'arc de grand cercle AE, ce point de contact décrit pendant un temps infiniment petit, un arc élémentaire de petit cercle dont le point A de contact de la courbe roulante C' avec la courbe C est le pôle. Cet axe est dit *axe instantané de rotation.*

Corollaire II. — Si l'on suppose une seconde courbe ν'_1 située sur la sphère mobile, elle enveloppera une courbe ν_1, de sorte que le même mouvement de la sphère mobile serait aussi produit si elle était conduite par deux lignes ν', ν'_1 invariablement liées avec elle, et restant constamment tangentes à leurs enveloppées préalablement tracées sur la surface immobile. Ces deux mouvements sont équivalents, bien que correspondants à des conditions distinctes.

Il sera toujours possible quand le second mouvement sera défini par les courbes ν', ν'_1 restant constamment tangentes à deux autres courbes données ν, ν_1 de trouver le mouvement de roulement équivalent. Il suffira, dans les positions successives des courbes ν', ν'_1 par rapport aux courbes ν, ν_1, de mener aux points de contact E, E_1 des arcs de grand cercle perpendiculaires aux tangentes communes en ces points; on marquera sur les deux sphères les points d'intersection A, B, A_1, B_1, ..., et, la série des points A, A_1, A_2, ..., A_n donnera la courbe roulante, tandis que la série des points B, B_1, B_2, ..., B_n donnera la courbe directrice, et il est facile de voir que ce mouvement sera un mouvement de roulement produit par la courbe $AA_1A_2\ldots A_n$ roulant sur la courbe $BB_1B_2\ldots B_n$.

En effet, lorsque A et B coïncident, ils ne peuvent se séparer que par suite du mouvement élémentaire de rotation autour

des points infiniment voisins A_1 et B_1 qui sont venus en coïncidence. Donc le mouvement est de roulement.

Théorème II. — *Quel que soit le mouvement d'une sphère mobile, ce mouvement peut être produit par le roulement d'une courbe située sur la sphère mobile, invariablement liée avec elle, sur une ligne fixe située sur la sphère immobile.*

En effet, le mouvement le plus général de la sphère mobile autour du centre est celui qui est produit par deux courbes ν', ν'_1 situées sur cette sphère, et restant l'une et l'autre constamment tangentes à deux courbes ν et ν_1 situées sur la sphère immobile, puisque, par suite d'un mouvement quelconque de la sphère, deux de ces points déterminés décrivent deux trajectoires ν, ν_1 qui sont les enveloppes de ces points, auxquels les courbes ν' et ν'_1 sont maintenant réduites. Or, d'après ce que nous venons d'établir, le premier mouvement peut être produit par un roulement d'une courbe liée avec la sphère sur une courbe tracée sur la sphère immobile. Donc, etc.

191. *Rayon de courbure tangentielle de l'enveloppe.* — Revenons à la question de la roulette sphérique. Si nous ajoutons membre à membre les dernières équations des groupes (1) et (2), nous obtenons

$$(5) \quad \frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \sin\beta\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{\sin\beta}{a}(\cot\tau + \cot\tau').$$

Cette équation prise simultanément avec l'équation (4), fait connaître le rayon de courbure tangentielle $\mathcal{R}'$ de l'enveloppe ν', lequel résulte de l'élimination de τ' entre ces deux équations.

On déduit de ces équations les propositions suivantes, qui donnent la construction de ce rayon de courbure.

Théorème I. — *Si, du centre de la sphère comme centre de perspective, on fait la projection conique de la figure sphérique sur le plan tangent au point de contact* A *des deux courbes* C *et* C'; *le conjugué harmonique* D *du point* A *par rapport à la projection du centre de courbure géodésique de la courbe* C, *et au symétrique relativement au même point* A *de la projection du centre de courbure géodésique de la courbe* C', *et le conjugué harmonique d du point* A *par rapport aux points analogues aux précédents des deux courbes* ν *et* ν', *sont*

situés sur une circonférence de cercle tangent aux deux courbes C *et* C′ *en leur point de contact.*

Ce cercle tangent au point A est indépendant de la position de la courbe ν, et de la nature de cette courbe. On déduit :

Théorème II. — *Si l'on considère les différentes enveloppes correspondantes à différentes courbes* ν', ν'_1, $\nu'_2, \ldots$ *situées sur une sphère mobile, et que du centre de cette sphère comme point de perspective, on prenne la projection conique de la figure sphérique sur le plan tangent au point de contact* A *des deux courbes* C *et* C′, *les conjugués harmoniques du point* A *par rapport aux projections des centres de courbure géodésique des courbes enveloppées* ν, ν_1, $\nu_2, \ldots$, *et aux symétriques relativement au point* A *des projections des centres de courbure géodésique des courbes enveloppées* ν', ν'_1, $\nu'_2, \ldots$ *sont distribués sur un cercle de diamètre constant, et tangent en ce point aux deux courbes* C *et* C′.

192. *Discussion.* — Traçons dans le plan tangent au point de contact A des deux courbes C et C′, tangentiellement à ces courbes du même côté que la courbe C, deux cercles : le premier ayant pour diamètre AD, et le second ayant pour diamètre $\frac{1}{2}$AD; traçons aussi les deux cercles symétriques par rapport à la tangente au point A, la projection conique du centre de courbure géodésique d'une courbe ν' située sur la sphère mobile, peut affecter les positions suivantes :

1° S'il est intérieur au cercle symétrique du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$, et s'éloigne du point A, la projection du centre de courbure géodésique de l'enveloppe ν est située dans la même région par rapport à la tangente commune aux courbes C, C′ au point A, et sa distance du point A varie de zéro à l'infini. Lorsque la projection du centre de courbure géodésique de ν' est à une distance plus petite ou plus grande que la demi-corde du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$, issue de ce point, la projection du centre de courbure géodésique de l'enveloppe ν est intérieure ou extérieure au cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$;

2° Si la projection du centre de courbure géodésique de la courbe ν' est située sur la circonférence de cercle symétrique du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$, la projection du centre de courbure géodésique de l'enveloppe ν est située à l'infini, ce qui revient à dire que le centre de courbure géodésique de cette enveloppe est sur le grand cercle dont le point A est le pôle.

3° Si la projection du centre de courbure géodésique de la courbe ν' est située entre les deux cercles symétriques du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$ et du cercle (AD), la projection du centre de courbure géodésique de l'enveloppe ν est située dans la seconde région du plan tangent par rapport à la tangente commune aux courbes C, C', partant de l'infini et se rapprochant du cercle (AD).

4° Si la projection du centre de courbure géodésique de la courbe ν' est sur le cercle symétrique du cercle (AD), la projection du centre de courbure géodésique de l'enveloppe ν est située sur le cercle (AD).

5° Si la projection du centre de courbure géodésique de la courbe ν' est extérieure au cercle symétrique du cercle (AD), la projection du centre de courbure géodésique de l'enveloppe ν est intérieure au cercle (AD).

6° Si la première projection est à l'infini, la seconde est située sur le cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$.

7° Si la première projection, partant de l'infini négatif, s'approche du point A, la seconde projection, partant de la circonférence $\frac{AD}{2}$, s'approche du point A.

8° Si la première projection est située en un point de la tangente commune aux courbes C, C' au point A, la seconde projection est symétrique de la première par rapport au point A.

Remarque. — Si du centre de la sphère on prend la perspective sphérique d'un cercle situé dans un plan tangent et passant par le point de contact A, on trouve l'ellipse sphérique, telle que deux arcs de grand cercle menés par un de ses points aux deux extrémités de l'axe se coupent orthogona-

lement, l'axe majeur étant perpendiculaire à la tangente au cercle au point de contact A. Donc les quatre ellipses qui sont la perspective sphérique des cercles (AD), $\left(\frac{AD}{2}\right)$, et de leurs symétriques, jouissent de la propriété énoncée. Elles peuvent dont servir à discuter les positions vraies des centres de courbure géodésiques des enveloppes ν et ν'; il en résulte aussi l'élégant théorème dû à M. Paul Serret.

193. Problème III. — *Les mêmes conditions étant posées que dans le problème II, le mouvement de la sphère mobile est réglé par cette condition que deux courbes ν', ν'_1 situées sur sa surface invariablement, restent constamment tangentes à deux courbes ν, ν_1 situées sur la surface immobile; courbe enveloppe d'une courbe ν'_2 située sur la surface mobile.*

Normale; rayon de courbure. — Si des points de contact E, E_1 des deux courbes ν', ν'_1 avec leurs enveloppes ν, ν_1, on mène des arcs de grand cercle perpendiculaires aux tangentes communes en ces points, leur intersection détermine le point A; or, les projections des centres de courbure géodésique des courbes ν', ν sont situées sur la projection de l'arc de grand cercle EA; de même les projections des centres de courbure géodésique des courbes ν'_1, ν_1 sont situées sur la projection de l'arc de grand cercle E'A. Or, si l'on prend les conjugués harmoniques d, d_1 du point A, le premier par rapport à la projection du centre de courbure géodésique de ν et au symétrique de la projection du centre de courbure géodésique de ν', le second par rapport aux points analogues relatifs aux courbes ν_1, ν'_1, les trois points d, d_1, A déterminent un cercle situé dans le plan tangent au point A. Si, maintenant, on appelle d_2 l'intersection de ce cercle avec la projection du grand cercle mené du point A, perpendiculairement à la courbe ν_2, et qu'on prenne le symétrique par rapport au point A de la projection du centre de courbure géodésique de la courbe ν'_2, le quatrième harmonique de ce point et des points A et d_2 sera la projection du centre de courbure géodésique de la courbe ν_2, enveloppe de la courbe ν'_2.

Cette construction donne donc la tangente et le rayon de courbure géodésique de l'enveloppe ν_2.

Remarque. — On résoudra sans difficulté l'une des questions dans lesquelles les courbes de la surface mobile, ou de la surface fixe seraient remplacées par des points ou par des cercles, ou des arcs de grand cercle. Il est, en effet, évident que les équations (4) et (5) feront connaître l'un des quatre éléments qui entre dans chacune d'elles, lorsque trois de ces éléments seront connus. Il en sera de même des questions inverses.

Théorèmes résultants. — Des questions qui viennent d'être résolues, on déduit sans difficulté les propositions suivantes :

1° Deux développantes d'une même courbe situées sur la sphère mobile envelopperont deux développantes d'une même ligne situées sur la sphère fixe;

2° Deux cercles ayant même pôle envelopperont deux développantes d'une même courbe;

3° Un cercle et son pôle envelopperont deux développantes d'une même ligne.

194. *De l'épicycloïde sphérique.* — C'est la courbe engendrée par un point d'un cercle assujetti à rester sur une sphère, et roulant sur un cercle situé sur la même sphère. Soient $2\delta'$, 2δ les angles sous lesquels on voit du centre de la sphère les diamètres du cercle roulant et du cercle fixe. L'équation du cercle roulant rapporté aux coordonnées tangentielles τ', β', est

$$\tang\frac{\tau'}{2} = \sin\beta'\tang\delta',$$

de laquelle on déduit

$$(1)\qquad \tang\tau' = \frac{2\sin\beta'\tang\delta'}{1-\sin^2\beta'\tang^2\delta'}.$$

Équation de la développée géodésique de l'épicycloïde. — Si l'on porte cette valeur dans l'équation (5), dans laquelle les valeurs de P et de P′ sont

$$P = a\tang\delta,\quad P' = a\tang\delta',$$

on trouve pour équation de la développée de l'épicycloïde rapportée aux coordonnées tangentielles τ et β

$$(2)\qquad 2\sin\beta\cot\tau = \sin^2\beta\tang\delta' + 2\cot\delta + \cot\delta'.$$

Rapport des éléments ds', $d\beta'$. — Si dans la troisième équation

du groupe (1) du n° 190, on porte les valeurs de R′ et de P′, on obtient

$$(3)\qquad -\frac{d\beta'}{ds'}=\frac{1+\sin^2\beta'\operatorname{tang}^2\delta'}{2a\operatorname{tang}\delta'}=\frac{d\beta}{ds}:$$

c'est le rapport inverse de la vitesse de translation du point de contact du cercle roulant sur le cercle fixe à la vitesse angulaire du cercle roulant par rapport à la tangente au point de contact.

Relations angulaires. — Si dans la première des deux équations (3), on porte la valeur de $ds'=a\operatorname{tang}\delta' de'$, que l'on obtient en remplaçant P′ par $\frac{ds'}{de'}$ dans l'expression de P′ écrite plus haut, on a

$$(4)\qquad -\frac{de'}{2}=\frac{d\beta'}{1+\sin^2\beta'\operatorname{tang}^2\delta'}.$$

Si l'on remplace dans le dénominateur 1 par $\cos^2\beta'+\sin^2\beta'$, cette équation s'intègre immédiatement, et l'on trouve en représentant par e'_0 la constante de l'intégration, l'intégrale suivante

$$(5)\qquad \frac{e'_0-e'}{2\cos\delta'}=\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{\operatorname{tang}\beta'}{\cos\delta'}\right),$$

ou bien

$$(5')\qquad \frac{\operatorname{tang}\beta'}{\cos\delta'}=\operatorname{tang}\frac{e'_0-e'}{2\cos\delta'}.$$

On trouverait de même, en opérant sur la seconde des équations (3),

$$\frac{de}{2}\,\frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\delta'}=\frac{d\beta}{1+\sin^2\beta\operatorname{tang}^2\delta'},$$

$$(6)\qquad \frac{\sin\delta}{\sin\delta'}\,\frac{e+e_0}{2\cos\delta}=\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{\operatorname{tang}\beta}{\cos\delta'}\right);$$

on déduit, en divisant (5) par (6),

$$\frac{e'_0-e'}{e+e_0}\,\frac{\operatorname{tang}\delta'}{\operatorname{tang}\delta}=-1,\qquad (-e'_0+e')\operatorname{tang}\delta'=(e+e_0)\operatorname{tang}\delta,$$

équation évidente, et qui résulte de $ds=ds'$; on déduit

$$(6')\qquad \frac{\operatorname{tang}\beta}{\cos\delta'}=\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sin\delta}{\sin\delta'}\,\frac{e+e_0}{\cos\delta}\right);$$

et, conséquemment,

$$(7)\quad \begin{cases} \text{arc}\left(\text{tang} = \cos\delta' \text{tang}\,\dfrac{e'_0 - e'}{2\cos\delta'}\right) \\ \qquad + \text{arc}\left(\text{tang} = \cos\delta' \text{tang}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sin\delta}{\sin\delta'}\,\dfrac{e + e_0}{\cos\delta}\right) = 2\pi. \end{cases}$$

Rayon de courbure géodésique de l'épicycloïde. — Ce rayon de courbure est donné par la relation $\iota = \tau + \tau'$; on a donc, par suite des équations (1) et (2),

$$(8)\quad \begin{cases} \iota = \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{2\sin\beta' \text{tang}\,\delta'}{1 - \sin^2\beta' \text{tang}^2\delta}\right) \\ \qquad + \text{arc}\left[\cot = \dfrac{1}{2}\left(\sin\beta' \text{tang}\,\delta' + \dfrac{2\cot\delta + \cot\delta'}{\sin\beta'}\right)\right]. \end{cases}$$

Angle de contingence tangentielle de l'épicycloïde. — On a $d\omega = de + d\beta$, et conséquemment

$$(9)\qquad -d\omega = d\beta' + 2\,\frac{\text{tang}\,\delta'}{\text{tang}\,\delta}\,\frac{d\beta'}{1 + \sin^2\beta' \text{tang}^2\delta'};$$

d'une autre part en appelant $d\text{E}$ l'angle de contingence géodésique de l'épicycloïde, l'on a $d\text{E} = \cos(\tau + \tau')d\varepsilon$, $d\omega = \cos\tau\, d\varepsilon$, donc

$$d\text{E} = \frac{\cos(\tau + \tau')}{\cos\tau}\,d\omega;$$

donc, le second membre est connu en fonction de la variable indépendante β', en se reportant aux formules (2), (8) et (9).

Angle de contingence tangentielle de la développée géodésique de l'épicycloïde. — On a la relation

$$ds\sin\beta = \sin\tau\, d\varepsilon,$$

on en déduit

$$(10)\qquad d\varepsilon = \frac{\text{tang}\,\delta' \sin\beta'\, de'}{\sin\tau}.$$

Or l'on a, d'après (2),

$$\sin\tau = \frac{2\sin\beta'}{\sqrt{4\sin^2\beta' + (\sin^2\beta' \text{tang}\,\delta' + 2\cot\delta + \cot\delta')^2}};$$

portant cette valeur ainsi que celle de $d\epsilon'$ (4) dans l'équation (10), on obtient

$$(11)\quad -d\varepsilon = \operatorname{tang}\delta' \frac{\sqrt{4\sin^2\beta' + (\sin^2\beta' \operatorname{tang}\delta' + 2\cot\delta + \cot\delta')^2}}{1 + \sin^2\beta' \operatorname{tang}^2\delta'} d\beta',$$

qui fait connaître l'angle de contingence $d\varepsilon$ en fonction de la variable indépendante β'.

195. Examinons le cas où le cercle roulant est un grand cercle de la sphère, et le cercle directeur, un petit cercle. Il n'est pas permis de prendre β' pour variable indépendante, parce que cet angle est constamment nul, comme le prouve la formule (1); τ' n'étant autre chose que l'arc du cercle roulant compris entre le point décrivant et le point de contact, on a l'équation $a\tau' = s$, d'où l'on déduit

$$\tau' = e \operatorname{tang}\delta;$$

or l'enveloppe des arcs τ' est le petit cercle directeur, donc τ est constamment nul et conséquemment $\tau' = \iota$. On a donc pour rayon de courbure tangentielle de l'épicycloïde

$$R' = a \operatorname{tang}(e \operatorname{tang}\delta).$$

L'angle dE de contingence tangentielle de cette courbe est donné par

$$dE = de \cos\iota = de \cos(e \operatorname{tang}\delta),$$

on déduit, E_0 étant la constante de l'intégration,

$$(E + E_0) \operatorname{tang}\delta = \sin(e \operatorname{tang}\delta).$$

Si l'on appelle dS l'arc élémentaire de l'épicycloïde, on a

$$\frac{dS}{dE} = \frac{a(E + E_0)\operatorname{tang}\delta}{\sqrt{1 - (E + E_0)^2 \operatorname{tang}^2\delta}},$$

qui est l'équation naturelle de la courbe. On reconnaît que c'est une hélice sphérique; elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dS}{dE} = \frac{a(E + E_0)\operatorname{tang}\delta}{\cos\iota}.$$

On voit que cette courbe est rectifiable; car on a, s_0 étant une constante,

$$(s - s_0)^2 + a^2(E + E_0)^2 \operatorname{tang}^2 \delta = a^2.$$

196. *Des roulettes planes.* — Il est nécessaire que nous disions quelques mots des roulettes planes, pour l'interprétation géométrique de quelques résultats obtenus dans les Chapitres précédents.

Le problème des roulettes planes consiste en ce que le mouvement d'un plan est déterminé par cette condition, qu'une courbe C′ située dans ce plan, et invariablement liée avec lui, roule sans glissement sur une courbe plane C, et parallèlement à son plan, et l'on se propose de trouver l'enveloppe ν dans le plan fixe d'une courbe ν' située dans le plan mobile.

On trouve les mêmes équations (1) et (2) que dans le n° 190, avec cette différence, que $a \sin\tau$, $a \sin\tau'$ sont remplacés par les lignes t, t', et que les rayons de courbures tangentielles R, R′ sont égaux aux longueurs t et t'. D'après cela, les équations (4) et (5) du même numéro, sont remplacées par les suivantes :

$$t + t' = \mathfrak{R} + \mathfrak{R}', \tag{1}$$

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \sin\beta\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}\right), \tag{2}$$

desquelles il est facile de déduire, comme précédemment, toutes les propositions intéressantes de la théorie des roulettes planes.

Enveloppe ν d'une ligne droite. — Contentons-nous d'examiner le cas particulier où il s'agit de trouver l'enveloppe ν d'une ligne droite, située sur le plan mobile.

Comme le centre de courbure de la ligne droite est à l'infini, il faut poser dans l'équation (2) t' infini, ce qui donne la relation

$$\frac{\sin\beta}{t} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P'}. \tag{3}$$

Or si l'on cherche l'enveloppe d'une droite dont un des

points parcourt la courbe $\frac{ds}{de} = P$, pendant qu'elle tourne autour de ce point d'un mouvement angulaire, relativement à la tangente en ce point, donné par la relation $\frac{ds}{d\beta} = D$, dans laquelle β est l'angle de la droite et de la tangente, et D se compose par rapport à β, comme P' se compose par rapport à e, on trouvera, dans le système tangentiel t et β la même équation (3) pour représenter l'enveloppe de cette droite. Donc l'enveloppe de cette droite n'est pas distincte de la développée de l'enveloppe ν produite par les diverses positions de la droite ν' lorsque la courbe $\frac{ds'}{de'} = P'$ roule sur la courbe $\frac{ds}{de} = P$, en entraînant cette droite ν'.

Corollaire I. — Soit la courbe roulante C' un cercle. On peut toujours supposer que la droite ν' est un diamètre de ce cercle perpendiculaire, à l'origine du mouvement, aux deux courbes C et C' en leur point de contact, puisque par un point quelconque du plan mobile on peut mener une parallèle à la droite donnée, et que ces deux droites auront pour enveloppes deux courbes ayant même développée. Dans le cas actuel, la roulette engendrée par un point de la circonférence du cercle C' roulant sur la courbe C qui est quelconque, est définie; or il est aisé de voir directement que l'enveloppe de la courbe ν sera une roulette de même espèce engendrée par un point de la circonférence d'un cercle dont le diamètre est égal au rayon du cercle C', ce point coïncidant à l'origine du mouvement avec le point de contact des deux courbes C et C', puisque les pieds des perpendiculaires abaissées des points de contact de ces deux cercles dans les diverses positions sur la droite ν', tracent sur le plan mobile un cercle dont le rayon est la moitié du rayon du cercle C'. De là résulte que si l'on cherche l'enveloppe d'une droite dont un des points parcourt la courbe ds pendant qu'elle tourne autour de ce point, de telle sorte que le rapport des vitesses ds, $d\beta$ reste constant et égal à D, cette enveloppe sera la développée d'une roulette engendrée par un point de la circonférence du cercle dont D est le diamètre, lorsque ce cercle roule sur la courbe ds.

Corollaire II. — Si la courbe directrice C est aussi un cercle, cette développée sera une épicycloïde, ainsi que l'enveloppe ν de la ligne ν'.

197. *Interprétation géométrique de l'équation* (10) *du n° 180.* — Ce qui précède nous donne le moyen d'interpréter géométriquement l'équation (10) du n° 180, et d'avoir à chaque instant la direction du rayon vecteur géodésique coupant la courbe $\frac{ds}{de} = P$, considérée dans ce numéro, sous l'angle dont la variation est donnée par la relation $\frac{ds}{d\beta} = D$.

1° On fera rouler sans glissement un plan T sur la surface le long de la courbe s, le lieu des points de contact sur ce plan sera une courbe S telle que la tangente fera avec une droite fixe OX située dans ce plan, et supposée tangente à l'origine de la courbe, un angle e dont les variations seront données par la relation $\frac{ds}{de} = P$.

2° On fera rouler sur la courbe S et dans le plan T, une courbe S' dont l'équation naturelle, par rapport à une droite fixe O'X' située dans son plan T', sera $\frac{ds'}{d\beta'} = D$, β' étant l'angle de la tangente à cette courbe avec l'axe O'X', cette courbe étant tangente à son origine à l'axe O'X'.

3° On supposera que le point de contact du plan mobile T tangent à la surface donnée en un point de la courbe ds, et le point de contact de la courbe roulante S' sur la directrice S, ne cessent jamais de coïncider pendant le mouvement, et qu'à l'origine de ce mouvement les points O et O', ainsi que les axes OX, O'X' ont coïncidé.

4° Par le point A de contact des deux courbes, on mènera dans le plan de la courbe roulante, une droite Ax parallèle à O'X'.

Cette parallèle donnera à chaque instant la direction du premier élément du rayon vecteur géodésique t, mené du point A de la courbe ds, et coupant cette courbe sur la surface proposée sous l'angle β donné par la condition $\frac{ds}{d\beta} = D$ du pro-

blème en question. En effet l'enveloppe de la droite Ax sur le plan T n'est autre chose que la développée plane de la courbe lieu des positions successives sur le plan T d'une droite fixe O′Y′ menée dans le plan T′ par le point O′ perpendiculairement à O′X′ (n° 196).

On peut aussi opérer de la manière suivante :

1° Développer sur un plan T la surface développable tangente à cette surface le long de la courbe ds, et faire rouler sur la courbe des contacts S après le développement une courbe plane S′ ayant pour équation naturelle $\frac{ds'}{d\beta'} = D$, par rapport à une droite fixe O′X′ située dans son plan, β' étant l'angle de la tangente en un de ses points avec l'axe fixe O′X′, et cet axe étant tangent à l'origine de la courbe S′.

2° Après avoir mené dans le plan de la courbe S′ l'axe O′Y′ perpendiculaire à O′X′, construire la développée du lieu des positions successives de O′Y′ ainsi que les diverses tangentes t_1, t'_1, t''_1,... de cette développée.

3° Replacer la surface développable dans sa position primitive autour de la surface donnée.

La figure ainsi obtenue sur la surface développable après cet enveloppement, sera telle que tous les éléments curvilignes de cette figure et de la figure correspondante tracée sur la surface proposée seront tangents chacun à chacun le long de la courbe ds de contact des deux surfaces.

Les tangentes t_1, t'_1, t''_1 de la développée plane sont devenues après l'enveloppement des lignes géodésiques de la surface développable tangentes à la développée par rayons vecteurs géodésiques de la transformée de l'enveloppe des positions de O′Y′, ces rayons vecteurs géodésiques sont donc tangents aux divers points de la courbe ds située sur la surface proposée, aux rayons vecteurs géodésiques tracés sur la même surface et coupant la courbe ds d'après la condition du problème $\frac{ds}{d\beta} = D$, et de plus, ils représentent en grandeur les rayons de courbure tangentielle tels que R.

L'enveloppe des rayons vecteurs géodésiques t tracés sur la surface donnée, d'après les conditions du problème I, n° 179,

est donc une ligne déterminée et complétement définie. Elle dépend sur une même surface donnée, des deux courbes planes $\frac{ds}{de} = P$ et $\frac{ds'}{d\beta'} = D$, définies par les constructions précédentes; nous appellerons cette enveloppe la résultante sur la surface des deux courbes (P) et (D).

Sur une même surface, lorsque la courbe $\frac{ds}{de} = P$ sera telle que la fonction P conservera la même forme, si la fonction D conserve aussi la même forme, les diverses enveloppes résultantes seront de même espèce. Cette remarque nous conduira à de nombreuses conséquences.

§ III. — Des enveloppes géodésiques.

198. Problème IV. — *Les mêmes conditions étant posées que dans le n° 188, la relation* F *est linéaire par rapport aux angles* $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_m$, *et donnée par la formule*

$$(1) \qquad B_1\beta_1 + B_2\beta_2 + \ldots + B_m\beta_m = C,$$

dans laquelle $B_1, B_2 \ldots, B_m$ *et* C *sont des constantes, enveloppe du dernier rayon géodésique.*

Points de contact. — Ils sont conjugués entre eux par la relation

$$(3) \qquad \frac{1}{P}\sum B = \sum \frac{B\sin\beta}{R},$$

laquelle fait connaître, par les propriétés des moyennes harmoniques, le rayon de courbure tangentielle de la développante de l'enveloppe cherchée $d\sigma_m$.

Rayon de courbure tangentielle. — La formule (5), n° 189, se réduit à la suivante :

$$(5) \qquad \sum \frac{B}{R}\left(\frac{R'}{N^2} - \frac{\cos\beta}{D}\right) = \frac{P'}{P^3}\sum B;$$

on en déduit l'expression et la construction du rayon de courbure de l'enveloppe, en opérant comme au n° 189.

Conséquences des formules précédentes. — L'équation différentielle de l'équation (1) peut s'écrire sous la forme

$$\sum \frac{B}{D} = 0.$$

Supposons que les rapports D relatifs aux $(m-1)$ premiers rayons géodésiques soient constants, cette équation montre que le rapport du dernier rayon géodésique sera aussi constant. On déduit les propositions suivantes :

1° Si le sommet A d'un faisceau de m rayons vecteurs géodésiques, se meut sur une courbe directrice s, et que $(m-1)$ de ces rayons enveloppent $(m-1)$ courbes de même espèce, c'est-à-dire qui seraient chacune la résultante (n° 197) de la courbe (P) et d'une courbe D de forme constante ; si de plus les angles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ que ces rayons vecteurs forment avec la tangente à la courbe directrice, sont liés entre eux par une relation linéaire, le dernier rayon vecteur géodésique enveloppera une courbe de même espèce que les précédentes.

2° Si la surface est un plan, et que le sommet A d'un faisceau de m droites situées dans ce plan se meuve sur une courbe directrice s ; si $m-1$ de ces droites restent tangentes à $m-1$ développées de roulettes engendrées par autant de cercles roulant sur cette directrice ; que, de plus, la somme des arcs décrits du point A comme centre avec des rayons $B_1, B_2, \ldots, B_m$ et compris entre la tangente à la directrice en ce point et chacune des droites du faisceau, reste constante, la $m^{ième}$ droite du faisceau enveloppera une développée de roulette engendrée par un point d'une circonférence de cercle roulant sur la même directrice.

En effet, par suite des conditions de tangence que remplissent les $m-1$ premiers rayons du faisceau, les rapports $D_1, D_2, \ldots, D_{m-1}$ sont constants d'après le n° 197. Donc, par suite de l'équation (3), la valeur de D_m est aussi constante, et conséquemment, le dernier rayon du faisceau enveloppe une développée de roulette engendrée par un cercle roulant sur cette directrice.

3° Les mêmes choses étant données que dans le théorème II, si la directrice s est un cercle ou une droite, les développées

des roulettes deviennent des épicycloïdes ou des cycloïdes tangentes en leur sommet à cette directrice.

4° Si quelques cercles générateurs se réduisent dans les théorèmes précédents à des points fixes, les développées des roulettes correspondantes sont ces points fixes situés sur la courbe directrice, et avec ces conditions les mêmes théorèmes existent.

5° Si sur une surface le sommet d'un angle constant formé par deux lignes géodésiques se meut sur une courbe directrice, pendant que l'un des deux côtés enveloppe une courbe résultante de P quelconque, et de D constante (n° 197), l'autre côté enveloppera une courbe de même espèce. On déduit :

6° Si dans un plan, pendant que le sommet de l'angle constant de deux droites se meut sur une courbe directrice *s*, l'un des deux côtés reste tangent à une développée de roulette engendrée par un cercle roulant sur la directrice *s*, l'autre côté enveloppera une développée de roulette engendrée par un cercle roulant sur la même directrice.

7° Le même théorème a lieu si l'angle étant variable, l'angle β_1 que le premier côté forme avec la tangente est supplémentaire de l'angle β_2, que le second forme avec la même tangente au sommet à la directrice.

8° Dans ces deux derniers théorèmes, si la directrice *s* est un cercle ou une droite, les développées sont des épicycloïdes ou des cycloïdes tangentes en leur sommet à la directrice *s*.

9° Si sur une surface le sommet du faisceau des trois rayons vecteurs géodésiques se meut sur une directrice *s*, et que deux de ces rayons enveloppent deux courbes de même espèce résultantes, la première de la courbe P et de la courbe D_1, et la seconde de la courbe P et de la courbe D_2, D_1 et D_2 étant deux constantes; si le troisième rayon partage l'angle des deux premiers dans un rapport constant, il enveloppera une courbe de même espèce que les précédentes.

10° Si dans un plan le sommet du faisceau de trois droites se meut sur une courbe directrice *s*, et que deux de ces droites enveloppent deux développées de roulettes engendrées par deux cercles roulant sur cette directrice, si la troisième droite partage l'angle des deux premières dans un rapport constant, elle enveloppera une développée de roulette engendrée par

un cercle roulant sur la même directrice, et si la directrice s est un cercle, toutes ces développées sont des épicycloïdes tangentes en leur sommet à ce cercle.

11° Si le nombre des rayons se réduit à deux seulement, le théorème I fondamental a encore lieu, lorsque D_1 est une fonction quelconque, et les deux courbes enveloppées sont encore de même espèce.

En effet, la première est la résultante de P et de D_1, la seconde est la résultante de P et de D_2. Or d'après l'équation (3′) D_2 est proportionnel à D_1. Donc, etc.

Il résulte de là :

12° Si dans un plan le sommet d'un angle formé par deux lignes droites se meut sur une directrice, et que l'une de ces droites enveloppe la développée de la courbe, lieu des positions d'une droite située dans le plan d'une courbe quelconque D roulant sur la directrice, l'autre droite enveloppera la développée de la courbe, lieu des positions d'une droite située dans le plan d'une courbe de même espèce que D, roulant sur la même directrice, pourvu que les angles β_1 et β_2 que les deux côtés de l'angle font avec la tangente à la directrice s, soient soumis à une relation linéaire de ces angles.

Les conséquences de ce dernier théorème sont nombreuses.

CHAPITRE V.

DES SURFACES APPLICABLES.

199. *Problème des surfaces applicables.* — Ce problème consiste à trouver toutes les surfaces qui peuvent s'appliquer exactement sur une surface donnée sans déchirure ni duplicature.

Soit la surface donnée représentée par trois équations entre les coordonnées cartésiennes du point et deux variables ρ et ρ_1, de telle sorte que x, y, z soient des fonctions de ces deux variables. On veut que, pour cette surface et celles qui lui sont applicables, les points se correspondent, deux à deux, de telle sorte que la distance de deux points sur une surface soit la même que la distance de deux points similaires sur l'autre surface dans toutes les directions possibles autour de ces points; cette condition est bien celle pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature. Cela posé, si l'on conserve aux paramètres H, H_1, G le sens que nous leur avons donné n° 31, nous avons

$$(1) \qquad ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + 2G^2 d\rho\, d\rho_1,$$

pour représenter la distance de deux points infiniment voisins pris sur une surface. H, H_1, G sont donc des fonctions de ρ et de ρ_1 qui ne doivent pas changer quand on passe d'une surface à l'autre. Or notre théorie donne les trois équations fondamentales du problème dans le cas le plus général où les coordonnées curvilignes ρ et ρ_1 sont quelconques. Ces trois équations sont : 1° l'équation donnée par le n° 37

$$(2) \qquad \frac{1}{rr_1} - \frac{1}{l^2} = \frac{\sin^2\varphi}{K_n^2},$$

dans laquelle le second membre est une fonction de ρ et ρ_1,

qui dépend des coefficients H, H_1, G, comme le prouve l'équation ($9''$) du nº 41; les deux autres équations sont les équations (11) du nº 42; les trois inconnues sont les composantes normales $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$ des courbures des lignes coordonnées, et la composante normale $\frac{1}{l}$ de la courbure inclinée de l'une de ces lignes par rapport à l'autre. De ces trois équations, la première est finie par rapport aux trois inconnues; les deux autres équations sont aux différences partielles, et linéaires par rapport aux mêmes inconnues et à leurs dérivées, les coefficients étant des fonctions de ρ et de ρ_1, et ne dépendant aussi que des paramètres différentiels H, H_1, G, de sorte que la connaissance de ces trois paramètres différentiels entraînera celle du système des trois équations dont nous venons de parler qui correspondront à la surface donnée : telle est la première partie du problème, c'est-à-dire la mise en équation.

L'intégration de ces trois équations simultanées fera connaître les trois inconnues $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{l}$ en fonction des paramètres ρ et ρ_1. Cela fait, si l'on a égard à ces valeurs, les équations renfermées dans les types (1), (2), (3) du Chapitre III du Livre I, que l'on classera par groupes de trois équations, détermineront les neuf cosinus X, X_1, X_2; Y, Y_1, Y_2; Z, Z_1, Z_2 en fonction de ρ et de ρ_1; enfin l'on déduira de ces valeurs les expressions des coordonnées x, y, z en fonction des paramètres ρ et ρ_1, ce qui fera connaître la surface, ou plutôt les surfaces cherchées. Telle est la deuxième partie du problème, comprenant l'intégration des équations aux différences partielles. C'est dans cette seconde partie que gît la difficulté de la question, à cause des intégrations qu'on ne sait pas effectuer.

200. *Liaison du problème des surfaces applicables et du problème des coordonnées curvilignes.* — Nos formules fondamentales du problème des surfaces applicables sont les plus générales que l'on puisse donner, puisqu'elles se rapportent à un système quelconque de coordonnées curvilignes tracées sur la surface donnée, et l'on voit que ces trois équations nous ont été fournies par la solution générale du problème des coor-

données curvilignes. Cette remarque n'avait pas échappé à Edmond Bour, qui s'exprime ainsi (*De la Déformation des surfaces*, p. 7) : « Réciproquement, on peut dire que mes équations fondamentales sont renfermées plus ou moins implicitement dans celles des coordonnées curvilignes, de sorte qu'il ne serait pas impossible de tirer synthétiquement de ces dernières tous les éléments de la déformation des surfaces. » On voit, par le numéro précédent, que nous avons tiré de la théorie des coordonnées curvilignes tous les éléments de la théorie de la déformation.

Si l'on voulait retrouver les équations fondamentales données par Edmond Bour, il suffirait de particulariser le système de coordonnées curvilignes et de prendre, comme il l'a fait lui-même, le système des coordonnées géodésiques et leurs orthogonales. Alors on trouverait à la place de l'équation (1) l'équation (9^{iv}) du n° 41, et, à la place des équations (11) du n° 42, les équations (11″) du même numéro. On voit qu'elles ne sont guère plus simples que nos équations générales. Il serait aussi facile de particulariser les équations relatives à tel autre système de coordonnées.

Il nous serait possible de démontrer que tous les éléments de solution des diverses questions, même les plus élevées de la théorie des surfaces, sont renfermés aussi dans nos formules des coordonnées curvilignes; mais il est inutile de poursuivre cet ordre d'idées, qui nous assignerait un but trop élevé et trop différent de celui que nous nous sommes proposé.

201. *De quelques surfaces applicables.* — Soient deux surfaces de genres différents, rapportées l'une et l'autre à un système de lignes géodésiques et de lignes orthogonales ; si, pour ces deux surfaces, le paramètre différentiel du premier ordre des lignes orthogonales ne dépend que d'une variable, ces deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre.

En effet, pour la première surface, l'expression de la distance de deux points infiniment voisins pris sur cette surface est, n° 141, formule (5),

$$ds^2 = dt^2 + \mathrm{H}^2 d\varepsilon^2, \tag{3}$$

dt étant l'arc élémentaire géodésique et H ne dépendant que de t. On aura de même pour la seconde surface en distinguant les mêmes éléments par l'indice 1,

$$ds_1^2 = dt_1^2 + H_1^2 \, d\varepsilon_1^2,$$

dt_1 étant l'arc élémentaire géodésique et H_1 ne dépendant que de t_1. Si l'on identifie ces deux expressions, on a les conditions $dt_1 = dt$, $d\varepsilon = d\varepsilon_1$, $H = H_1$; la première équation donne $t_1 = t + c$, c étant une constante. Or, les deux surfaces étant de genre donné, H et H_1 contiennent : la première une fonction de t qui spécifie l'espèce de surface appartenant au genre donné, la seconde une fonction de t_1, ces deux fonctions et leurs dérivées pouvant entrer dans les deux paramètres H et H_1. Cela posé, si l'on remplace t_1 par sa valeur $t + c$, et qu'on suppose que la fonction de t_1 qui entre dans H_1 se trouve déterminée, on aura une équation différentielle que déterminera la fonction de t; et, par conséquent, l'intégration de cette équation déterminera la seconde surface.

Théorème de Bour. — Une surface héliçoïdale est applicable sur une surface de révolution.

En effet, dans la surface de révolution, le paramètre différentiel H_1 de l'arc orthogonal des lignes méridiennes ne dépend que d'une variable; or, dans la surface héliçoïdale, d'après la valeur de ds^2 donnée par la formule (2) du n° 87, le paramètre différentiel de l'arc orthogonal des lignes $\mu_1 =$ const. de ce système ne dépend que d'une seule variable t. De plus, il est aisé de voir que ces lignes sont géodésiques : 1° par la forme de ds^2, n° 87; 2° par la forme de l'équation de la ligne géodésique de la surface héliçoïdale donnée au n° 129. Donc, etc.

La simplicité de cette démonstration résulte de la forme que nous avons donnée au déplacement héliçoïdal ds^2 au numéro indiqué.

202. Problème I. — *Recherche d'une surface de révolution applicable sur une surface héliçoïdale d'espèce donnée.* — Soit $\psi(t)$ la fonction qui détermine la surface héliçoïdale dans son espèce, n° 85. Si l'on rapporte cette surface aux coordonnées $\mu_1 =$ const. et $t =$ const., comme on l'a fait au n° 87,

on trouve, pour l'expression du déplacement infiniment petit d'un point effectué sur la surface,

$$(5)\qquad ds^2 = \left[1 + \frac{t^2}{a^2+t^2}\psi'^2(t)\right]dt^2 + (a^2+t^2)\,d\mu_1^2.$$

Or, si l'on cherche l'expression du déplacement ds_1 infiniment petit d'un point effectué sur la surface de révolution, rapportée à ses lignes méridiennes et à leurs orthogonales, n° 89, $z = f(t_1)$ étant l'équation de la méridienne, on trouve

$$(6)\qquad ds_1^2 = [1 + f'^2(t_1)]\,dt_1^2 + t_1^2\,d\theta^2.$$

Identifions ces deux expressions, en posant

$$d\theta = d\mu_1,\quad t_1^2 = t^2 + a^2,$$

$$[1 + f'^2(t_1)]\,dt_1^2 = \left[1 + \frac{t^2}{a^2+t^2}\psi'^2(t)\right]dt^2.$$

Si l'on élimine t de la dernière, au moyen de la seconde, on obtient

$$(7)\qquad f'^2(t_1) = \frac{a^2 + (t_1^2 - a^2)\,\psi'^2\left(\sqrt{t_1^2 - a^2}\right)}{t_1^2 - a^2}.$$

Cette équation différentielle, dans laquelle les variables sont séparées, détermine la fonction $f(t_1)$; car, si l'on pose cette fonction égale à z, on a

$$(8)\qquad z = \int dt_1 \sqrt{\frac{a^2 + (t_1^2 - a^2)\,\psi'^2\left(\sqrt{t_1^2 - a^2}\right)}{t_1^2 - a^2}},$$

qui est l'équation de la courbe méridienne de la surface de révolution.

203. *Applications.* — L'héliçoïdale donnée a pour ligne de profil la ligne donnée par l'équation

$$(9)\quad \psi(t) = a \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b\sin\alpha}{t}\right) + m\left(\sqrt{t^2 - b^2\sin^2\alpha} - b\cos\alpha\right),$$

dans laquelle a, b, α, m sont des constantes.

Si l'on prend la dérivée par rapport à t, on trouve

$$\psi'(t) = \frac{mt^2 - ab\sin\alpha}{t\sqrt{t^2 - b^2\sin\alpha}}.$$

Or, si l'on porte cette valeur dans l'équation (8), on obtient

$$(10)\quad z = \int dt_1 \frac{\sqrt{m^2t_1^2 + (a^2 + b^2\sin^2\alpha) - (am + b\sin a)^2}}{\sqrt{t_1^2 - (a^2 + b^2\sin^2\alpha)}}.$$

Si, pour abréger, l'on pose

$$a^2 + b^2\sin^2\alpha = l^2,$$

et qu'on introduise la variable φ par la relation $t_1 = l\sin\varphi$, on obtient

$$z = \int d\varphi\sqrt{(am + b\sin\alpha)^2 - l^2 - m^2l^2\sin^2\varphi},$$

qui s'intègre par les arcs d'ellipse.

Ainsi la courbe méridienne représentée par la première transcendante elliptique donne la surface de révolution applicable sur l'héliçoïdale qui nous occupe.

204. *Caractère de cette surface héliçoïdale.* — La surface héliçoïdale qui a pour courbe de profil la valeur de ψ donnée par l'équation (9) est l'héliçoïde réglé quelconque.

Pour démontrer cette proposition, il n'y a qu'à chercher les équations de l'héliçoïde réglé quelconque, et à en déduire la courbe de profil donnée dans cette surface par l'intersection d'un plan passant par l'axe.

Calculons l'équation de l'héliçoïdale engendrée par une courbe dont le plan parallèle à une droite fixe est doué d'un mouvement héliçoïdal autour de cette droite, ce mouvement étant donné par la constante a. Soit cette droite prise pour axe des z, soit b la distance d'un point A du plan de la courbe à l'axe des z. Si nous rapportons la courbe génératrice aux deux droites menées par le point A, l'une Az_1 parallèlement à l'axe des z, et l'autre $A\rho$, perpendiculairement à cet axe et dans le plan de la courbe; $z_1 = \psi_1(\rho)$ étant l'équation de la courbe par rapport à ces axes, si l'on représente par α l'angle

des deux droites b et $A\rho$, par x, y, z les coordonnées cartésiennes rectangles d'un point quelconque de la courbe dans une de ses positions, par θ l'angle de b avec le plan des zx, les équations de la surface héliçoïdale seront

$$\begin{aligned} x &= b\cos\theta + \rho\cos(\alpha+\theta), \\ y &= b\sin\theta + \rho\sin(\alpha+\theta), \\ z &= a\theta + \psi_1(\rho). \end{aligned}$$

Pour avoir l'equation de la surface entre les variables x, y, z, il suffit d'éliminer θ et ρ entre ces trois équations. Or si l'on ordonne les seconds membres des deux premières équations par rapport aux cosinus et aux sinus de l'angle $\theta+\alpha$, qu'on élève au carré, et qu'on ajoute, on obtient une première équation qui donne le carré de la projection t du rayon vecteur sur le plan des xy; si ensuite on divise l'une par l'autre, on obtient la tangente de l'angle φ que cette projection fait avec l'axe des x; ces deux équations sont

$$t^2 = \rho^2 + 2b\rho\cos\alpha + b^2,$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\left(\theta + \alpha - \operatorname{arc\,tang} = \frac{b\sin\alpha}{\rho + b\cos\alpha}\right).$$

D'après cela, l'équation de la surface sera

$$\frac{z}{a} + \alpha = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right) - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b\sin\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$+ \frac{1}{a}\psi_1\left(\sqrt{x^2+y^2-b^2\sin^2\alpha} - b\cos\alpha\right),$$

qui rentre dans la formule $a\theta + \psi(t)$ de l'équation de la surface donnée au n° 85, pourvu que l'on pose

$$\psi(t) = \psi_1\left(\sqrt{t^2 - b^2\sin^2\alpha} - b\cos\alpha\right) - a\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b\sin\alpha}{t}\right).$$

Il est évident que si la fonction $\psi_1(t)$ est mt, m étant une constante, on retombe sur l'expression (9); on a donc cette proposition générale :

THÉORÈME. — *L'héliçoïde réglé quelconque est applicable sur la surface de révolution dont la courbe méridienne est donnée par la transcendante elliptique de première espèce.*

205. Cas particuliers. — 1° *Héliçoïde gauche à plan directeur.*

Dans ce cas, il faut poser $m=0$ et $\alpha=0$ dans l'équation (9). D'après cela l'équation (10) devient

$$z=a\int\frac{dt_1}{\sqrt{t_1^2-a^2}},$$

dont l'intégrale est

$$2t_1=\mathrm{A}e^{\frac{z}{a}}+\frac{a^2}{\mathrm{A}}e^{-\frac{z}{a}};$$

A étant la constante introduite par l'intégration, et e la base des logarithmes népériens. Si l'on fait cette constante égale à a, on obtient l'équation de la chaînette. On a donc cette proposition connue :

L'héliçoïde gauche à plan directeur est applicable sur la surface de révolution dont la méridienne est la chaînette.

2° *Héliçoïde engendré par une droite située dans un plan perpendiculaire à l'axe.*

Dans ce cas, il faut poser nulle la tangente m de l'inclinaison de la droite sur le plan des xy, ce qui donne, dans la formule (9),

$$(9'')\qquad \psi(t)=a\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{b\sin\alpha}{t}\right).$$

D'après cela, la formule (10) devient

$$(10'')\qquad z=\int\frac{a\,dt_1}{\sqrt{t_1^2-a^2-b^2\sin^2\alpha}}.$$

Or, si l'on pose $a^2-b^2\sin^2\alpha=\mathrm{B}^2$, on trouve, A étant la constante de l'intégration,

$$2t_1=\mathrm{A}e^{\frac{z}{a}}+\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}e^{-\frac{z}{a}},$$

qui appartient au genre chaînette, et que l'on construit en réduisant les ordonnées z de la chaînette dans une raison constante. On déduit de là cette proposition :

L'héliçoïde réglé engendré par une droite située dans un plan perpendiculaire à l'axe est applicable sur une surface de révolution dont la courbe méridienne est une ligne du genre chaînette.

206. ***Surface héliçoïdale réglée dont la droite génératrice est inclinée sur l'axe d'après des conditions données.***

1° Si m satisfait à la relation $a + mb\sin\alpha = 0$, l'équation (9) conserve la même forme, mais l'équation (10) se réduit à la forme simple

$$z = \int m\,dt,$$

qui est l'équation d'un cône de révolution.

Ainsi la surface réglée satisfaisant à cette condition est applicable sur un cône de révolution.

2° Si m satisfait à la condition $am = \pm l - b\sin\alpha$, l'équation (9) conserve encore la même forme, et l'équation (10) devient

$$z = m\int \frac{t_1\,dt_1}{\sqrt{t_1^2 - l^2}},$$

dont l'intégrale est, c étant la constante de l'intégration,

$$z - c = m\sqrt{t_1^2 - l^2},$$

qui représente un hyperboloïde de révolution.

Appelons γ l'inclinaison de la tangente de l'hélice directrice sur le plan des xy, h le pas de cette hélice, l'on a $a = \pm\frac{h}{2\pi}$ suivant que le mouvement a lieu dans un sens ou dans le sens opposé, et $a = b\tang\gamma$. Si l'on appelle β l'angle que la droite génératrice fait avec le plan des xy, l'on a $m = \tang\beta$. D'après cela, la condition $a + mb\sin\alpha = 0$ devient

$$\sin\alpha = \mp\frac{\tang\gamma}{\tang\beta},$$

laquelle se trouve satisfaite dans le cas de l'héliçoïde réglé développable, puisque alors

$$\sin\alpha = \pm 1 \quad \text{et} \quad \tang\gamma = \tang\beta.$$

La condition relative au second cas devient

$$\sin\alpha = 2\frac{\tang\gamma}{\tang 2\beta}.$$

207. Problème II. — *Recherche d'une surface héliçoïdale applicable sur une surface de révolution d'espèce donnée.*

Dans la question actuelle, la fonction $f(t_1)$ est donnée, et il s'agit de déterminer la fonction $\psi(t)$ qui représente l'ordonnée de la courbe de profil de la surface héliçoïdale. Or, si l'on a recours aux équations de conditions obtenues au n° 202, on trouve

$$\psi'(t) = \sqrt{f'^2_{t_1}(\sqrt{t^2+a^2}) - \frac{a^2}{t^2}},$$

dans laquelle f'_{t_1} est la dérivée de $f(t_1)$ par rapport à t_1, et c'est dans cette dérivée que l'on a remplacé t_1 par sa valeur en fonction de t. Si l'on intègre par rapport à t, on obtient

$$(11) \qquad \psi(t) = \int dt \sqrt{f'^2_{t_1}(\sqrt{t^2+a^2}) - \frac{a^2}{t^2}};$$

conséquemment, les équations de la surface héliçoïdale seront, n° 85,

$$x = t\cos\theta, \quad y = t\sin\theta, \quad z = a\theta + \int dt \sqrt{f'^2_{t_1}(\sqrt{t^2+a^2}) - \frac{a^2}{t^2}}.$$

208. Applications. — *Recherche des surfaces héliçoïdales applicables sur une surface de révolution dont la courbe méridienne est du genre chaînette.*

Nous venons de démontrer que deux espèces d'héliçoïdes réglés sont applicables, l'un sur la surface de révolution dont la courbe méridienne est du genre chaînette, et l'autre sur une surface de révolution dont la courbe méridienne est une chaînette; le problème en question mettra en évidence d'autres héliçoïdes qui jouissent de la même propriété. Il faut poser

$$f'^2_{t_1}(t_1) = \frac{n^2}{t_1^2 - c^2},$$

n et c étant des constantes; l'équation (11) donne

$$(11') \qquad \psi(t) = \int \frac{dt}{t} \sqrt{\frac{t^2(a^2-n^2) - a^2(c^2-a^2)}{c^2-a^2-t^2}},$$

qui est l'équation de l'ordonnée de la courbe de profil de la surface héliçoïdale.

Avant d'intégrer cette équation généralement, distinguons les trois cas suivants :

1° $n = c^2 = a^2$, on a $\psi'(t)$ nul, et par conséquent $\psi(t)$ égale à une constante; on obtient donc l'héliçoïde gauche à plan directeur.

2° Si $n = a$ et $c > a$, l'équation (11′) devient

$$\psi(t) = a\sqrt{c^2 - a^2}\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - c^2 - a^2}},$$

dont l'intégrale est, en représentant par A une constante arbitraire,

$$\psi(t) = A + a \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{t}\right).$$

Ainsi la courbe de profil est la sinussoïde (9″) du n° 205.

3° Si $n > a$, $a = c$, l'équation (11) devient

$$\psi(t) = \sqrt{n^2 - a^2}\int \frac{dt}{t},$$

dont l'intégrale est, A étant une constante arbitraire,

$$\psi(t) = A + \sqrt{n^2 - a^2}\log t.$$

Passons maintenant à l'intégration de l'équation générale (11′). Posons, pour abréger,

$$c^2 - a^2 = B^2 \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{a^2 - n^2} = K^2,$$

l'on obtient

$$\psi(t) = \frac{a}{k}\int \frac{dt}{t}\sqrt{\frac{t^2 - K^2B^2}{B^2 - t^2}}.$$

Si l'on pose

$$\sqrt{\frac{B^2 - t^2}{t^2 - K^2B^2}} = \operatorname{tang}\varphi,$$

φ étant une nouvelle variable, on obtient

$$\psi(t) = 2a\frac{(K^2 - 1)}{K}\int \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{(1 + \operatorname{tang}^2\varphi)(1 + K^2\operatorname{tang}^2\varphi)},$$

qui est une fonction rationnelle par rapport à tang φ, et dont l'intégrale est

$$\psi(t) = a\left(\text{arc tang} = \text{K}\sqrt{\frac{\text{B}^2 - t^2}{t^2 - \text{K}^2\text{B}^2}} - \frac{1}{\text{K}}\,\text{arc tang} = \sqrt{\frac{\text{B}^2 - t^2}{t^2 - \text{K}^2\text{B}^2}}\right),$$

de laquelle il est aisé de déduire les intégrales qui se rapportent au cas particulier que nous venons d'étudier.

Nous obtenons ainsi, parmi nos résultats, plusieurs de ceux obtenus par Bour, mais par une analyse différente.

FIN.

IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Paris, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

